2015 年度 前期課程　　力学　レポート問題3　解答例　　7 月 22 日

担当教員: 松井哲男　　クラス：１年理 II, III 1- 6

問題 1 地球の中心から距離 R の円軌道を周回する宇宙船の位置ベクトルは、この軌道面に垂直な方向を z 軸にとると、

$$\boldsymbol{r}_0(t) = \quad (R\cos(\omega t+\delta), R\sin(\omega t+\delta), 0)$$

と書くことができる。ここで重力は円運動のための向心力を与えるから、

$$R\omega^2 m = G\frac{Mm}{R^2}$$

とならなければならない。この軌道上にある宇宙船内の質量 m の物体に働く力は、重力とみかけの力（遠心力）の和となり、

$$m\ddot{\boldsymbol{r}'} = \boldsymbol{F} - m\ddot{\boldsymbol{r}}_0 = -G\frac{Mm}{R^2}\hat{\boldsymbol{r}}_0 + m\omega^2\boldsymbol{r}_0 = 0.$$

従って、重力と遠心力（見かけの力）が相殺し、無重力状態となる。

問題 3 一様の回転する系では (7) 式は、

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \quad = \quad \frac{\delta^2\boldsymbol{r}}{\delta t^2} + 2\boldsymbol{\omega}\times\frac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta t} + +\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

となり、これをもとの慣性系における運動方程式 $m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$ の左辺に代入すると、

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \quad = \quad m\frac{\delta^2\boldsymbol{r}}{\delta t^2} + 2m\boldsymbol{\omega}\times\frac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta t} + m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

であるから、回転する系でみた運動方程式は、

$$m\frac{\delta^2\boldsymbol{r}}{\delta t^2} = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

となる。ここで、$\boldsymbol{v}'$ は回転系でみた質点の見かけの速度を表す。右辺の第 2 項はコリオリの力を表し、質点の見かけの進行方向と回転軸の向きに対して垂直の方向に力が働く。右辺第 3 項は、公式、$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ を用いて、

$$-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = m(\omega^2\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega})$$

と変形でき、$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$ の方向を z 軸にとって $\boldsymbol{r}$ ’$= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{k}z$ とすると

$$-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = m\omega^2\boldsymbol{r}\text{ ’}$$

であるから、これは回転軸から遠ざかる向きに働く遠心力を表す。

問題 4 重力加速度を g とすると、地表で質量 m の物体に働く重力の大きさは

$$F_G = gm$$

一方、地球の自転によるこの物体に働く遠心力は、赤道上で

$$F_C = m\omega^2 R$$

従って、2 つの力の比は、

$$R = F_C/F_G = \frac{g}{\omega^2 R}$$

ここで、$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$、$\omega = 2\pi/\mathrm{day} = 2\pi/(24 \times 60 \times 60\mathrm{s})$、$R = 6400\ \mathrm{km} = 6.4 \times 10^6\ \mathrm{m}$ を代入すると、比は、

$$F_C/F_G = \frac{4 \times 3.14^2 \times 6.4 \times 10^6}{9.8 \times 8.64^2 \times 10^8} = 3.5 \times 10^{-3}$$

東京では地球の回転軸からの距離は $R' = R\cos(36/180\pi) = 0.81R$ であるから、比は

$$F'_C/F_G = 0.035 \times 0.81 = 2.8 \times 10^{-3}$$

となる。赤道上で遠心力と重力が釣り合う為には、地球の自転周期 T はこの比の逆数の平方根の分だけ速くならないと行けないから、１日の長さは、$T = \sqrt{0.0035}\ \mathrm{day} = 0.059\ \mathrm{day} = 1.4$ 時間となる。 つまり、地球の自転速度が約 17 倍となると、赤道上では重力は遠心力と釣り合い、全てのものは宙に浮くことになる。

問題 8　1. 質量 M、半径 R の薄い球殻の、中心を通る軸のまわりの回転に対する慣性モーメントは、

$$I = \sigma 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \sin\varphi (R\sin\varphi)^2$$

ここで、φ は球殻の中心から見た回転軸方向からの天頂角で、$R\sin\varphi$ は回転軸から天頂角 φ の位置にある球殻までの距離、$\sigma = M/(4\pi R^2)$ 球殻の面密度である。φ 積分は $x = \cos\varphi$ と変数変換すると簡単に実行でき、

$$I = \sigma R^2 2\pi \int_{-1}^{1} dx (1 - x^2) = \frac{2}{3} M R^2$$

2. 質量 M、長さ l の細長い一様な棒の中心の周りの回転に対する慣性モーメントは、単位長さあたりの棒の質量 $\rho = M/l$ を使うと、

$$I = \rho \int_{-l/2}^{l/2} dx x^2 = \rho \frac{2}{3} \left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} M l^2$$

3. 質量 M、半径 R の一様な円盤の中心を通って、円盤面に垂直な軸の周りの回転にたいする慣性モーメントは、円盤の単位面積あたりの質量 $\sigma = M/(\pi R^2)$ を使うと、

$$I = \sigma \int_0^R dr r \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 = \sigma 2\pi \int_0^R dr r^3 = \sigma 2\pi \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

回転軸が重心を通る円盤上の線の場合は、

$$I = \sigma \int_0^R dr r \int_0^{2\pi} d\varphi (r\cos\varphi)^2$$

ここで、倍角の公式 $\cos\varphi^2 = (1 - \cos(2\varphi))/2$ を用いると、

$$\int_0^{2\pi} d\varphi (\cos\varphi)^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) = \pi$$

であるから、

$$I = \sigma\pi \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{4} M R^2$$

問題 9 剛体をたくさんの小さいセルに分割し、i 番目のセルの質量を m_i、位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$ とする。剛体の重心座標を $\boldsymbol{R}$ とすると、

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{M}$$

であるから、セルの位置座標を、

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_i$$

と書くと、剛体の全運動エネルギー E は、

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\dot{\boldsymbol{R}} + \dot{\boldsymbol{r}}'_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\dot{\boldsymbol{R}}^2 + 2\dot{\boldsymbol{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}'_i + (\dot{\boldsymbol{r}}'_i)^2 \right)$$

$M = \sum_i m_i$、$\sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i = 0$ を用いると、

$$E = \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{R}}^2 + \sum_i m_i (\dot{\boldsymbol{r}}'_i)^2$$

剛体が重心を通る回転軸の周りに角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転していると、全てのセルは角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転運動するから、

$$\dot{\boldsymbol{r}}'_i = \omega \times \boldsymbol{r}'_i$$

という関係がある。従って、

$$E = \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i)^2$$

ここで、$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i)^2 = \omega^2 \boldsymbol{r}'^2_i - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}'_i)^2$ を用いると、第 2 項は回転のエネルギーの形に書き換えられる：

$$E = \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

ここで、

$$I = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[(\boldsymbol{r}'_i)^2 - (\hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{r}'_i)^2 \right]$$

は、重心を通る $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}/\omega$ の向きの回転軸の周りの慣性モーメントを表わす。

半径 R、長さ l、質量 M の中空の円筒が、速さ V で平面上を回転しているとき持っている運動エネルギーは、$\omega R = V$、$I = MR^2$ を用いると、

$$E = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} MV^2 = MV^2$$

であるから、水平面から角度 θ で傾いた斜面を滑らないで距離 d ころがり落ちたとき、エネルギーの保存より、

$$MV^2 = gMd \sin\theta$$

よって、重心の速さは

$$V = \sqrt{gd \sin\theta}$$

回転の速さは、

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{\sqrt{gd \sin\theta}}{R}$$