

担当教員: 松井哲男

問題 4 (サイクロトロン運動) 磁場中を運動する荷電粒子に働くローレンツ力は、

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

で与えられるので、一様磁場中に入射した荷電粒子は、入射方向と磁場の向きをそれぞれ x 軸、 y 軸にとると、入射した瞬間に右手系で z 軸の正の方向に力を受け、その軌道はこの図で上の方に曲げられ、その後、図 1 のように円運動 (サイクロトロン運動) を行って反対向きに飛び出してくる。

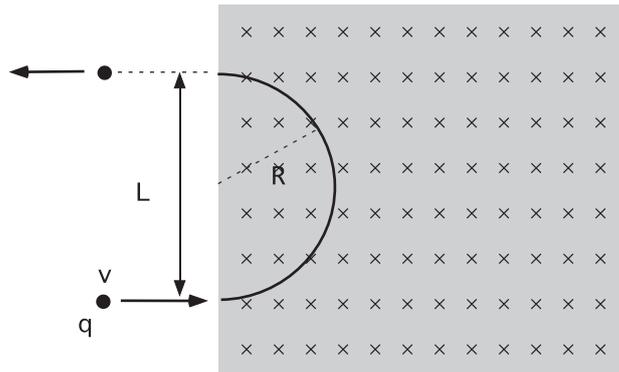


図 1: 問題 3

円運動の半径 (サイクロトロン半径) R は遠心力と磁場から受けるローレンツ力との釣り合いの条件

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \quad (2)$$

によって決まる。従って、一様磁場中に侵入した速さ v の荷電粒子が磁場中で描く軌道は半径 $R = qB/mv$ の半円で、入射地点から進行方向に対して入射の方向と磁場の向きに垂直になる方向 (この図では上の方) に

$$L = 2R = \frac{2mv}{qB} \quad (3)$$

移動した場所から入射した方向と反対方向に飛び出してくる。入射してから飛び出すまでにかかる時間 T は、

$$T = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{qB} \quad (4)$$

従って、入射速度 v が 2 倍になると、距離 L は 2 倍になるが、時間は変化しない。この周期 T で向きの変わる電位差を作り、左側にも同じ向きの一様磁場の領域を作れば、荷電粒子をその進行方向に何回も加速することができる。これが、サイクロトロン加速器の基本原理である。

問題 7 (ベクトル・ポテンシャルの不定性) 一般に磁荷なしの条件 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ により、磁場 \mathbf{B} を $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ で与えるベクトル・ポテンシャル \mathbf{A} が存在する。ただ、このベクトル・ポテンシャルには不定性があり、 \mathbf{A} に任意の関数 $\chi(\mathbf{r})$ の $\nabla\chi$ を加えても、 $\nabla \times (\nabla\chi) = 0$ であるから、磁場 \mathbf{B} は変化しない。この問題のように、ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ は、それと異なるベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}' = (0, Bx, 0)$ と同じ $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ を与えるが、これは、 \mathbf{A} が \mathbf{A}' と $\chi = -Bxy$ を使って $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla\chi$ と書けるからである。

問題 10 (アンペールの法則の応用) 積分型のアンペールの法則

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (5)$$

を中心軸を共有する半径 r の円周に沿って用いると、中心軸から r の距離での磁場の強さ B_r は

$$2\pi r B_r = \begin{cases} 0 & \text{for } r < b(R_2) \\ \mu_0 I & \text{for } b(R_2) < r < a(R_1) \\ \mu_0(I - I) = 0 & \text{for } a(R_1) < r \end{cases} \quad (6)$$

従って、

$$B_r = \begin{cases} 0 & \text{for } r < b(R_2) \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{for } b(R_2) < r < a(R_1) \\ 0 & \text{for } a(R_1) < r \end{cases} \quad (7)$$

磁場の向きは時計の反対回りに円周に沿った方向。

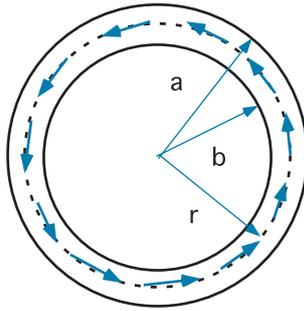


図 2: 問題 10

問題 12 (運動起電力) 時刻 t で長方形導体ループ面の垂線と一様磁場のなす角度を $\theta = \omega t$ ととると、このループを貫く磁束は、回転軸が長方形の中心を通る (a) の場合、

$$\Phi_M(t) = abB \cos(\omega t) \quad (8)$$

であるから、この導体ループに生じる起電力は、

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d}{dt} \Phi_M(t) = abB\omega \sin(\omega t) \quad (9)$$

この回路の抵抗を R とすると、この回路に流れる電流は、

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{abB\omega}{R} \sin(\omega t) \quad (10)$$

このとき外力が単位時間あたりにする仕事は単位時間あたりに発生するジュール熱に等しいので、

$$P(t) = RI^2(t) = \frac{(abB\omega)^2}{R} \sin^2(\omega t) \quad (11)$$

となる。回転軸を長方形の一辺にとった (b) の場合も、ループ面を貫く磁束の時間変化は (8) で与えられるので、同じ結果を得る。

問題 15 (変位電流とマクスウェルの方程式) 電荷密度 ρ の時間微分は、電場のガウスの法則より、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (12)$$

一方、アンペールの法則を、

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (13)$$

と変更すると、電流密度の発散は

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \left(\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \kappa \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\kappa}{\mu_0} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (14)$$

ここで、恒等的

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$$

であることを用いた。従って、電荷の保存則から得られる連続の方程式の左辺に代入すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{\kappa}{\mu_0} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (15)$$

となり、これが恒等的に0となる条件は、

$$\epsilon_0 - \frac{\kappa}{\mu_0} = 0,$$

すなわち、

$$\kappa = \mu_0 \epsilon_0,$$

がみたされれば良い。従って、変形したアンペールの法則（アンペール・マクスウェルの法則）は、

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (16)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

はマクスウェルの変位電流と呼ばれる、