格子ＱＣＤによるチャーム中間子系の研究
Charmed meson scatterings from lattice QCD

矢木 拓也 (KEK)

橋本 省二 (KEK, 総研大)
森松 治 (KEK, 総研大, 東大)
大谷 宗久 (KEK, 杏林大)

2011年 2月 @ 理研

1 : Introduction

2 : Lattice QCD simulation

3 : Lüscher's formula

4 : Details of calculation

5 : Results

6 : Summary & Future plan

1. Introduction

エキゾチックハドロン

- X(3872) : Belle (2003)

$$\begin{cases} \text{Production :} \; B \to K \; X(3872) \\ \text{Decay :} X(3872) \to \pi^- \pi^+ J/\psi \end{cases}$$

従来のクォーク模型では再現不能

⇒ **エキゾチックハドロン**

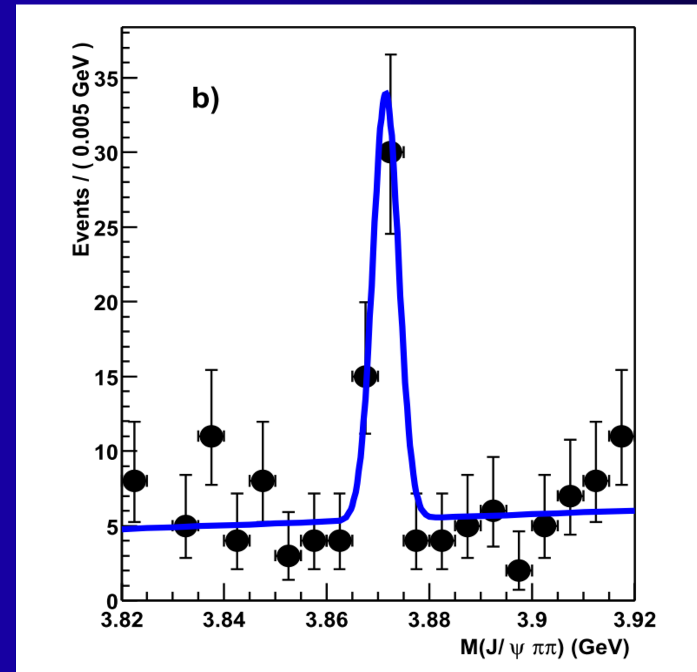
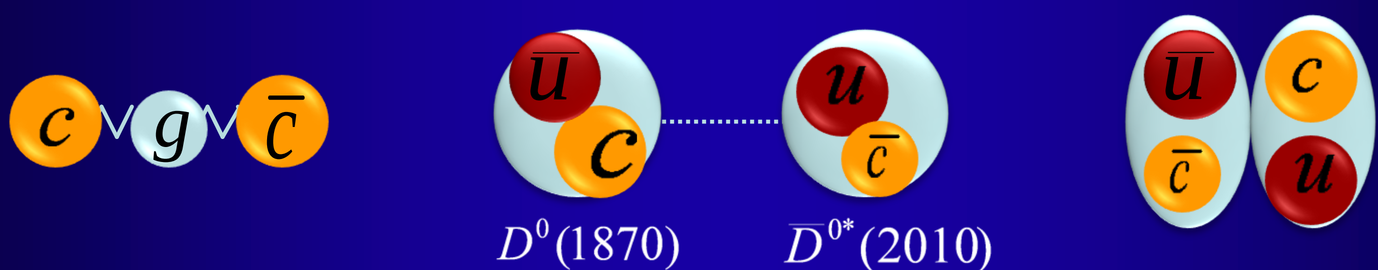


Fig : $\pi^+\pi^-J/\psi$不変質量分布(Belle 2003)



X(3872)の捉え方

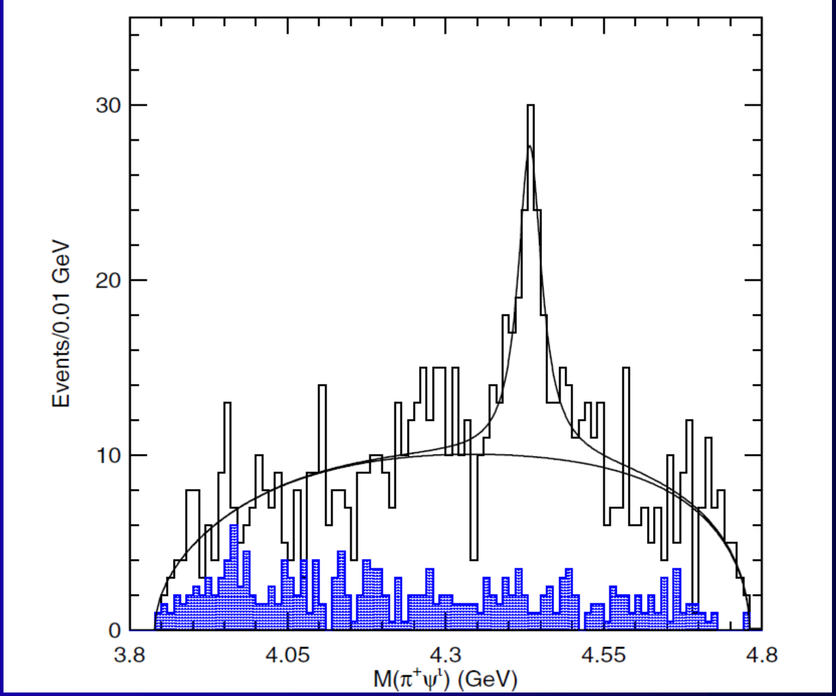
X(3940),Y(4260)・・・と発見され続けている

●Z(4430)：Belle (2007)

Production： $B \rightarrow K\ Z^{+}(4430)$

Decay：$Z^{+}(4430) \rightarrow \pi^{+}\psi'$

- Mass ：4433 ±5 [MeV/c^2]
- Width ：45^{+35}_{-18} [MeV/c^2]
- Quantum number ：$I^G = 1^+$



Fig：$\pi^+\psi'$ 不変質量分布(Belle 2007)

likely to be $(c\bar{c})+(u\bar{d})$

4クォーク状態の有力な候補

➢ Babar found no peak (2009)

最近の実験

- $Z_1^+(4050)$, $Z_2^+(4250)$: Belle(2008)

$$\bar{B}^0 \to K^- \pi^+ \chi_{c1}$$

  - Quantum number ：$I^G = 1^-$

電荷+チャーモニウム ⇒4クォーク状態？

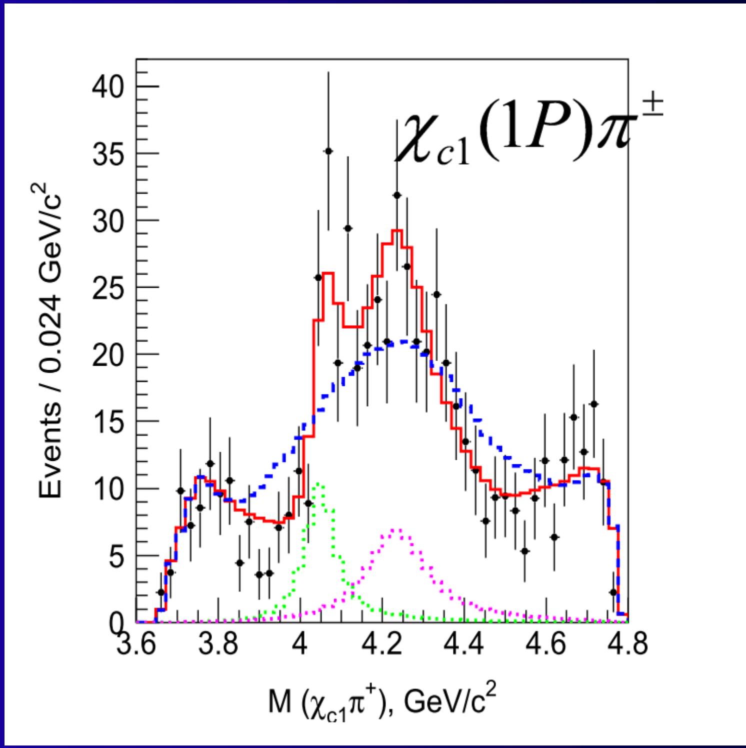


Fig : $\chi_{c1}\pi^+$ 不変質量分布(Belle 2008)

- $Z_b^{\pm}(10610)$, $Z_b^{\pm}(10650)$: Belle(2011)

$$\Upsilon(5S) \to \begin{cases} \Upsilon(nS)\pi^+\pi^- \ (n=1,2,3) \\ h_b(mP)\pi^+\pi^- \ (m=1,2) \end{cases}$$

  - Quantum number ：$I^G(J^P) = 1^+$

Bクォークの系にも同様のエキゾチックがある？

Z(4430), Z_1, Z_2, Z_bの物理的描像

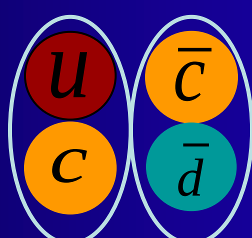
① テトラクォーク状態

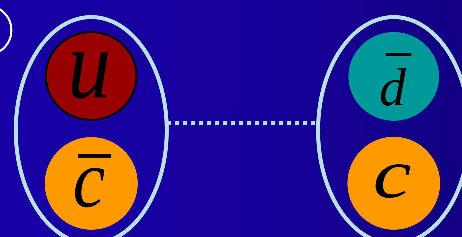
- ダイクォークと反ダイクォークの束縛状態

② 分子状態

- D中間子(B中間子)と$\bar{D}$中間子($\bar{B}$中間子)の束縛状態

• Z(4430) • Z_1(4050), Z_2(4250) • Z_b(10610), Z_b(10650)	⇔	D_1D^*(4430) D^*D^*(4020), D_1D(4290) B^*B(10605), B^*B^*(10650)

①


②


我々がやったこと

Z⁺(4430)に結合するS波の中間子の組み合わせ $(I^G(J^P)=1^+(0^-))$

	combination	threshold[MeV]	quantum number	eigen state
S-wave	$D \otimes D_0^*$	4270	$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}(0^- \otimes 0^+)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lvert D^+ \bar{D}_0^{*0}\rangle - \lvert D_0^{*+} \bar{D}^0\rangle\right)$
$(J^P = 0^-)$	$D_1 \otimes D^*$	4430	$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}(1^+ \otimes 1^-)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lvert \bar{D}_1^0 D^{*+}\rangle + \lvert \bar{D}^{*0} D_1^+\rangle\right)$
	$\chi_{c1}(1P) \otimes \rho$	4280	$0^+ \otimes 1^+(1^{++} \otimes 1^{--})$	$\lvert \chi_{c1}(1P)\, \rho\rangle$
	$J/\psi \otimes a_1$	4360	$0^- \otimes 1^-(1^{--} \otimes 1^{++})$	$\lvert J/\psi\, a_1\rangle$
P-wave	$\cdots$			
	$\psi' \otimes \pi$	3830	$\cdots$	$\cdots$
	$\cdots$			
D-wave	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Candidate for Z(4430)

Term to product eigenstate of G-parity

Z(4430)の物理を解き明かす第一歩として、Z(4430)と結合するS波の中間子系の散乱長の計算を格子QCDより行なった。

Recent Works （Lattice Simulation）

Tetra quark state

$[\bar{c}\bar{q}cq] \Longrightarrow$
- X(3872) : Chiu *et.al.* (2006)
- Y(4260) : Chiu *et.al.* (2005)

$[\bar{s}\bar{q}sq] \Longrightarrow$
- φ(1020) : Prelovsek *et.al.* (2010)

Charmed-meson interaction

$[\bar{c}c][\bar{q}q]$

or

$[\bar{c}q][\bar{q}c]$

- Scattering Lengths for [J/ψ]-[π, ρ, N] : Yokokawa *et.al.* (2006)
- Potential for [J/ψ] - [N] : Kawanai *et.al.* (2010)
- Scttering lengths for [J/ψ]-[π, N], [D]-[π, D, K] : Liu *et.al.* (2009)
- Scttering lengths for [D_1]-[D*] coupled to Z(4430) (not eigenstate of I^G) : Meng *et.al.* (2009)

2．Lattice QCD Simulation

格子シミュレーションの手続き

- ウィック回転 $t \longrightarrow i\tau$ $\Rightarrow$ 4次元ユークリッド空間へ

①統計平均⇒経路積分

① 作用で決まる確率分布 に従いゲージ配位 U_i を生成

② クォークの伝搬関数 $D^{-1}(U_i)$ ⇒ ハドロンの相関関数 etc $A(U_i)$

③ 統計平均 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A(U_i) \sim \int DU \det D(U) e^{-S(U)} A(U)$

②相関関数の時間依存性⇒ハドロンのエネルギー固有値

$$C(t) \equiv \sum_{\vec{x}} \langle 0 | \underbrace{O_{\pi^+}(x)}_{\text{sink}} \underbrace{O^\dagger_{\pi^+}(0)}_{\text{source}} | 0 \rangle$$

$$O_{\pi^+}(x) \equiv \bar{d}\gamma^5 u(x)$$

$$= \sum_{\vec{x}} \sum_{n} \left| \langle 0 | O_{\pi^+}(0) | n \rangle \right|^2 \exp(-m_n t + i\vec{q}\cdot\vec{x})$$

$$= \left| \langle 0 | O_{\pi^+}(0) | \pi^+ \rangle \right|^2 \exp(-m_{\pi^+} t) + \cdots$$

QCD on the lattice : 準備

- 格子間隔 *a* の空間を考える
  - 微分 ⇒ 差分

$$\partial_\mu f(x) = \frac{\partial_\mu^+ + \partial_\mu^-}{2} f(x) + O(a^2)$$

$$\begin{cases} \partial_\mu^+ f(x) \equiv \dfrac{f(x+a\hat{\mu}) - f(x)}{a} \\ \partial_\mu^- f(x) \equiv \dfrac{f(x) - f(x-a\hat{\mu})}{a} \end{cases}$$

  - 積分 ⇒ 格子点についての和

QCD on the lattice

- 格子間隔 a の4次元ユークリッド空間上でのSU(N)ゲージ理論 :Wilson(1974)

➢フェルミオン作用：ウィルソンフェルミオン

$$D_{\mathrm{W}} = \frac{1}{2}\gamma^{\mu}(D_{\mu}^{+} + D_{\mu}^{-}) - \frac{ra}{2} D_{\mu}^{+} D_{\mu}^{-}$$

$$D_{\mu}^{+} f(x) = \frac{U_{x,\mu} f(x+a\hat{\mu}) - f(x)}{a}$$

$$D_{\mu}^{-} f(x) = \frac{f(x) - U^{\dagger}_{x-a\hat{\mu},\mu} f(x-a\hat{\mu})}{a}$$

- 第2項がカイラル対称性を陽に破る
- 計算コストが比較的安価

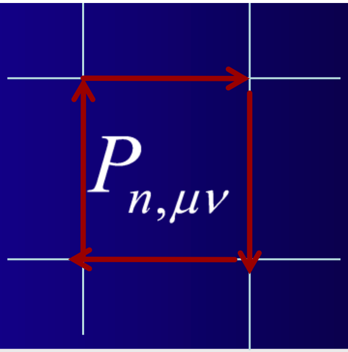
$$U_{n,\mu} \equiv e^{igaT_a A^a_{n,\mu}} \in SU(N)$$

➢ゲージ作用：プラケットアクション

- ゲージ不変量であるゲージ場の最小ループ $P_{\mu\nu}$ を用いて与える

$$S_p = \beta \sum_{n,\mu<\nu} \left[1 - \frac{1}{N} \mathrm{Re\,tr}\, P_{n,\mu\nu} \right] = \frac{\beta g^2}{8N} \sum_{n,\mu<\nu} a^4 F_{n,\mu\nu} F_n^{\mu\nu} + O(a^5)$$

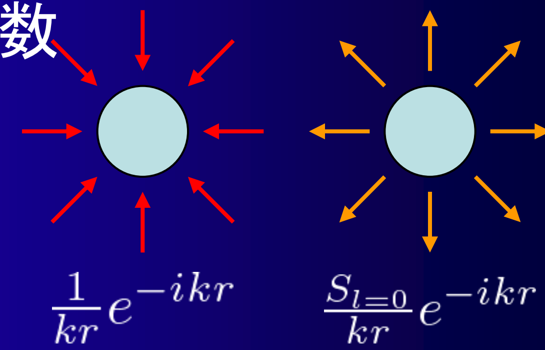
$$P_{n,\mu\nu} \equiv U_{n,\mu} U_{n+\mu,\nu} U^{\dagger}_{n+\nu,\mu} U^{\dagger}_{n,\nu}$$



3. Lüscher’s formula

散乱長から見る相互作用(1)

- 相互作用存在の下の, 遠方での波動関数



  - 部分波展開 (S波を見る)

$$\Psi_{l=0}(r) \propto \frac{1}{kr}\left[e^{-ikr} - S_{l=0}(k)e^{ikr}\right]$$

$$S_l(k) \equiv e^{2i\underbrace{\delta_l}_{\text{位相差}}(k)}$$

$$\propto \; e^{i\delta_0(k)}\left[\cos\delta_0(k)\; j_0(kr) - \sin\delta_0(k)\; n_0(kr)\right]$$

  - 位相差δ を k で展開

$$k\cot\delta_0(k) = -\frac{1}{\underbrace{a_0}_{\text{散乱長}}} + \frac{1}{2}r_0k^2 + O(k^4)$$

散乱長から見る相互作用(2)

- 散乱長: 相互作用を特徴付ける量

$$\delta_0(k) \underset{k\to 0}{\sim} -k\,a_0 \Rightarrow \sin(kx+\delta_0(k)) \sim \sin(k(x-a_0))$$

Ex) 井戸型ポテンシャル

$$V(\vec{x}) = \begin{cases} V_0 & (|\vec{x}| < R) \\ 0 & (|\vec{x}| > R) \end{cases}$$

V_0 r_0: 定数

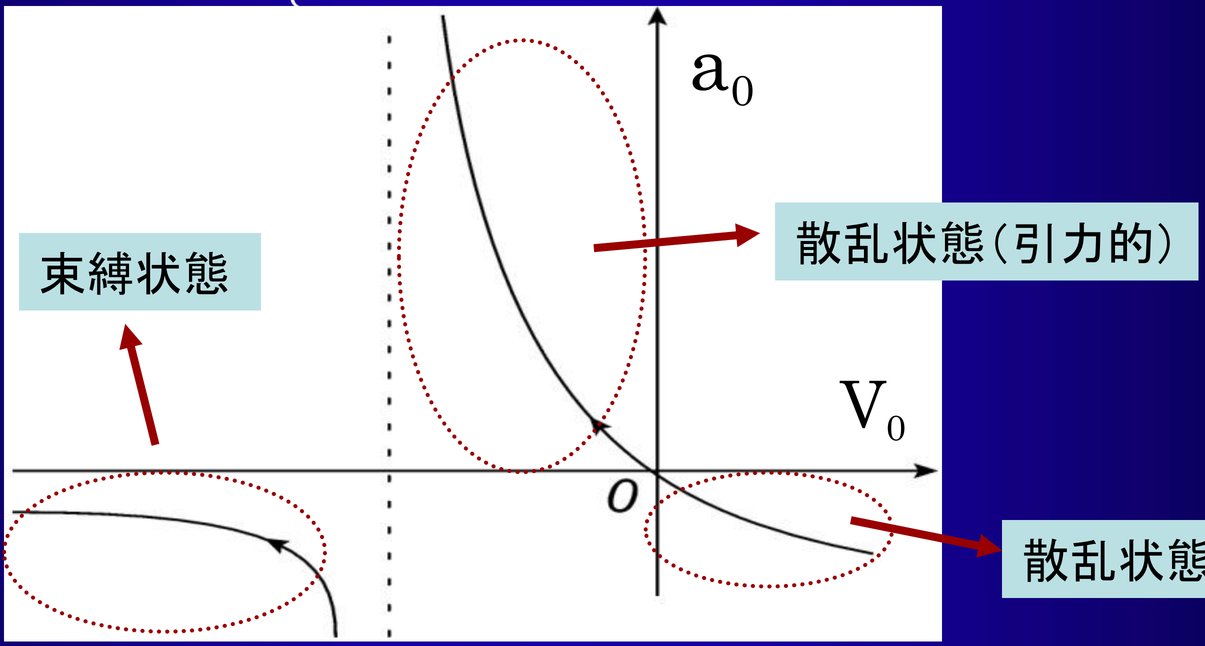


Fig. 井戸の深さに対する散乱長の振る舞い

ルシャーの公式(1)：1+1 次元量子力学

- 空間サイズ: L， 時間サイズ：∞ ，相互作用の及ぶ範囲：R

b.c. $:\phi(x+nL)=\phi(x)$ n：整数

A）相互作用 OFF：

$$\Rightarrow \quad kL = 2\pi\, n$$

B）相互作用 ON ： if $/x/ >> R/2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{kL+2\delta(k)=2\pi\, n}$$

$L >> R \;\Rightarrow \delta(k)\ (L:\text{finite}) \to \delta(k)\ (L:\infty)$

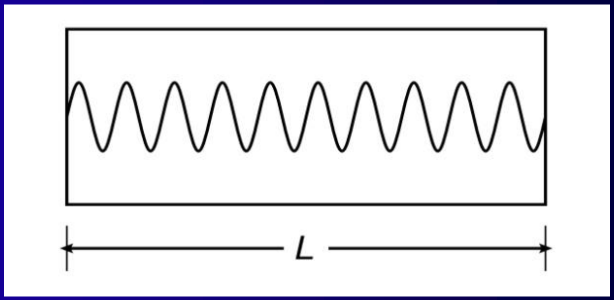


Fig: 有限箱中での波動関数 （相互作用：OFF)

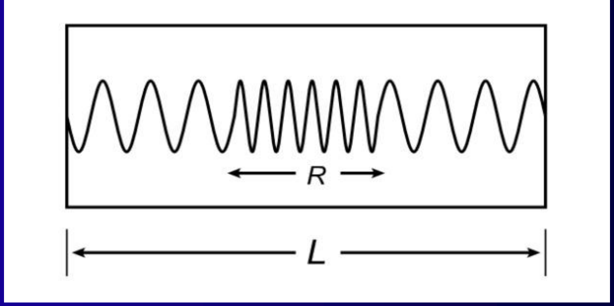


Fig:有限箱中での波動関数 （相互作用：ON)

Method to calculate $\delta(k)$

① 有限箱中での1粒子質量 “m” を数値計算

② 有限箱に2粒子を置いて離散的なエネルギー“W”を数値計算

$$W = 2\sqrt{m^2 + k^2}$$

③ “m”と“W”から“k”が解かる ⇒ 位相差$\delta(k)$がわかる！

ルシャーの公式(2) : 3+1 次元量子力学

➢ 有限な3+1次元時空では？

ヘルムホルツ方程式の一般解の漸近形について同様に考えれば良い！

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)\ \phi(\vec{x}) = 0 \quad R < |\vec{x}| < L/2 \\ \text{境界条件：}\quad \phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x} + \vec{n}L) \quad \vec{n}\text{:三次元整数ベクトル} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi(\vec{x}) = \dfrac{1}{L^3}\sum_{\vec{n}} \dfrac{1}{q^2 - k^2} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \quad \left(\vec{q} = \dfrac{2\pi}{L}\vec{n}\right) \\ = \left[\underbrace{\dfrac{1}{L^3}\sum_{\vec{n}} \dfrac{1}{q^2 - k^2}}_{\equiv \alpha_{l=0}(k)} j_0(k|\vec{x}|) + \underbrace{\dfrac{k}{4\pi}}_{\equiv \beta_{l=0}(k)} n_0(k|\vec{x}|) \right] + (l \neq 0) \end{cases}$$

ルシャーの公式（for S波）

$$k \cot \delta_0(k) = \frac{k\alpha_{l=0}(k)}{\beta_{l=0}(k)} = \frac{1}{\pi L} Z\left(1, \frac{k^2 L^2}{4\pi^2}\right)$$

$$Z(s, x) \equiv \sum_{\vec{m} \in Z^3} (m^2 - x)^{-s}$$

Lüscher(1991)

➢メソッド ： 1+1時空の場合と同様

有限体積 L^3 に対して k を数値計算し，位相差$\delta_0(k)$を得る

ルシャーの公式(4)：展開形とその破綻

- 3+1次元の式 ：Lüscher(1991)

$$k\cot\delta_0(k) = \frac{1}{\pi L} Z(1,\eta) \quad ①$$

$$Z(s,x) \equiv \sum_{\vec{m}\in Z^3} (m^2 - x)^{-s}$$

$$\eta \equiv \frac{k^2 L^2}{4\pi^2} \approx \frac{mL^2}{4\pi^2}(W-2m)$$

η > 0 ：斥力的
η < 0 ：引力的

- “$a_0/\pi L$”について展開 :Lüscher(1986)

$$W - 2m = -\frac{4\pi a_0}{mL^3}\left(1 + c_1\frac{a_0}{\pi L} + c_2\left(\frac{a_0}{\pi L}\right)^2 + \cdots\right) \quad ②$$

②は引力側で破綻

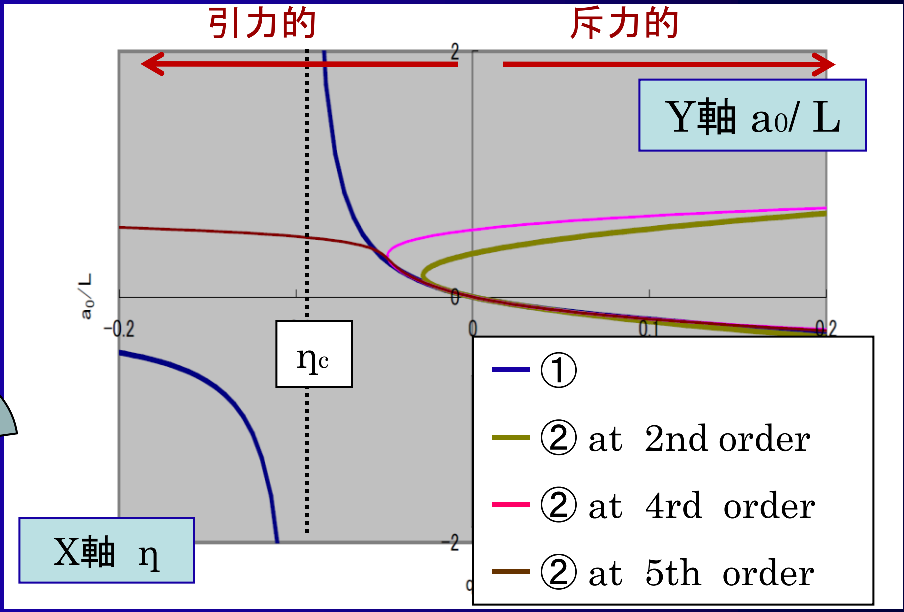


Fig: ηについての散乱長の振る舞い

4. Details of Calculation

セットアップ

ゲージ配位

- ゲージ作用:プラケット作用
- クエンチ近似
- ゲージ固定の有無 ： クーロンゲージ
- β=6.15 ⟺ 格子定数 $a \approx 0.07$ [fm], $a^{-1} \approx 2810$ [MeV]
- 格子サイズ：$L^3 \times T$ = 24^3x48, 16^3x48
- 統計数:N～2000 (for 24^3x48), 3000 (for 16^3x48)

価クォークの伝播関数

- フェルミオン作用:ウィルソン作用
- ソースタイプ ： smearedソース
- ホッピングパラメータ
  - $\underbrace{\kappa = 0.136}_{\eta_c(1S) \approx 2980 \text{ [MeV]}}$ (for *charm*-) ,$\underbrace{0.152,\ 0.1525,\ 0.1528, 0.1531}_{m_\pi = 530 \sim 790 \text{ [MeV]}}$ (*up*- and *down*-)

内挿場・相関関数

●$I^G(J^P)=1^+(0^-)$の$Z^+(4430)$に結合する中間子の組み合わせ

	combination	threshold[MeV]	quantum number	eigen state
S-wave $(J^P=0^-)$	$D\otimes\overline{D_0^*}$	4270	$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}(0^-\otimes 0^+)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lvert D^+\bar{D}_0^{*0}\rangle - \lvert D_0^{*+}\bar{D}^0\rangle\right)$
	$D_1\otimes\overline{D}^*$	4430	$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}(1^+\otimes 1^-)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lvert \bar{D}_1^0 D^{*+}\rangle + \lvert \bar{D}^{*0} D_1^+\rangle\right)$
	$\chi_{c1}(1P)\otimes\rho$	4280	$0^+\otimes 1^+(1^{++}\otimes 1^{--})$	$\lvert\chi_{c1}(1P)\,\rho\rangle$
	$J/\psi\otimes a_1$	4360	$0^-\otimes 1^-(1^{--}\otimes 1^{++})$	$\lvert J/\psi\, a_1\rangle$

●1粒子状態

$$C_i(t)\equiv\sum_{\vec{x}}\langle 0|O_i(x)O_i^\dagger(0)|0\rangle\propto\exp(-m_i t)+\cdots$$

$$\left\{\begin{array}{l} O^\mu_{\bar{D}_1^0}(x)\equiv\bar{c}(x)\gamma^\mu\gamma^5 u(x)\\ \vdots\end{array}\right.$$

●2粒子状態

$$C_{ij}(t)\equiv\sum_{\vec{x},\vec{y}}\langle 0|O_i(x,y)O_i^\dagger(0,0)|0\rangle\propto\exp(-W_{ij}t)+\cdots$$

$$\left\{\begin{array}{l} O_1(x,y)\equiv g_{\mu\nu}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[O^\mu_{\bar{D}_1^0}(x)O^\nu_{D^{*+}}(y)+O^\mu_{\bar{D}^{*0}}(x)O^\nu_{D_1^+}(y)\right]\\ \vdots\end{array}\right.$$

2粒子それぞれの運動量をゼロへ $\boxed{\vec{p}_{D_1}=\vec{p}_{D^*}=\vec{0}}$

○

1. 励起状態の寄与の抑制

k= 2π/L, 4π/L, …

2. 結合の効果のある程度の抑制

$[\bar{c}c][\bar{d}u]\Leftrightarrow[\bar{c}u][\bar{d}c]$

⇔

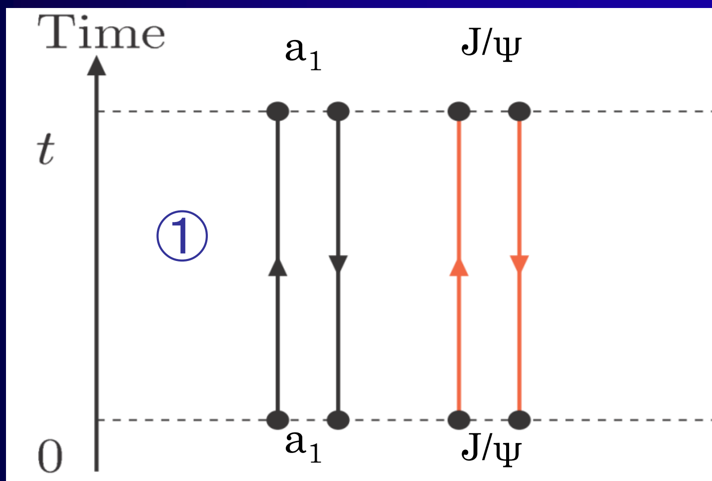
×

1. 行列要素が非対称となる
2. テトラクォーク形の内挿場には使えない

2粒子状態の相関関数の構造

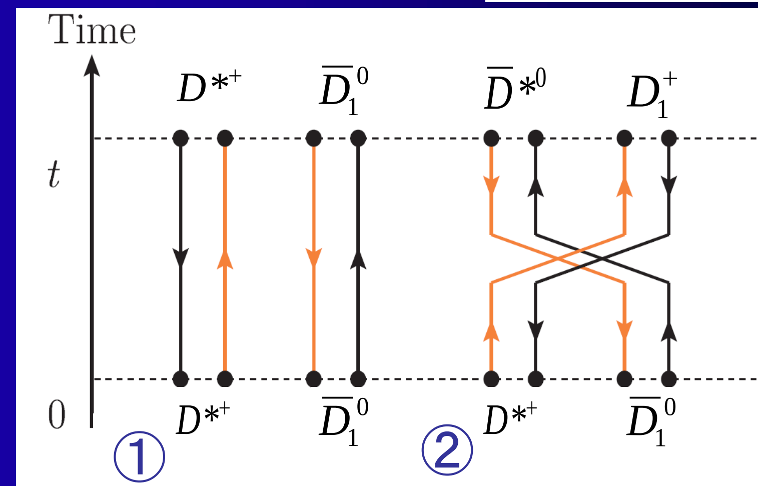
●2粒子状態の相関関数をクォーク伝搬関数で分解($c\bar{c}$の対生成・対消滅の効果は無視する)

● チャーモニウムと軽い中間子の散乱系



●D中間子の散乱系

→ Charm quark
→ Up / Down quark



① グルーオンの交換を通じた相互作用

② Gパリティの固有状態にしたことに由来する、状態の混合を通じた相互作用

Ex)

$$\bar{D}_1^0 D^{*+} \rightarrow \bar{D}^{*0} D_1^+$$

$$\bar{D}^{*0} D_1^+ \rightarrow \bar{D}_1^0 D^{*+}$$

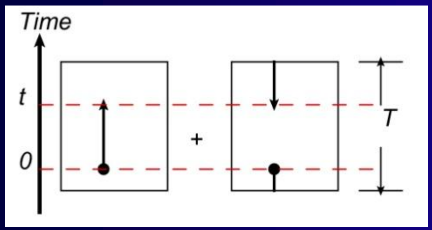
②の有無が2つの系の相互作用の振る舞いの違いを特徴づける

3. Results

相関関数の解析

① パラメトリゼーション

- 1粒子状態の相関関数$C_h(t)$



: ハドロンの伝搬

T : 時間方向のサイズ

$$C_h(t) \propto e^{-m_h t} + e^{-m_h (T-t)}$$

$$C_h(t) = A_2 \cosh\left[-m_h\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] \quad (A_2 : 定数)$$

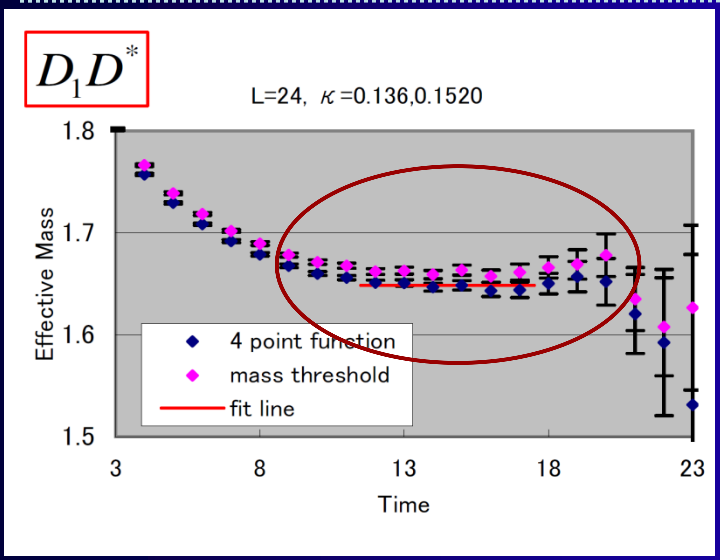
② フィット領域の決定

- 有効質量

$$R_h(t) \equiv \frac{C_h(t+1)}{C_h(t)} \Rightarrow m_h^{effect}(t)$$

励起状態の寄与無 時間に対してプラトー

※2粒子状態の相関関数についても同様に有効エネルギーを定義できる



- 十分にプラトーに達したところで、1粒子状態、2粒子状態それぞれのフィット領域を決定
- L=16の計算は, L=24の計算よりも早い時間でノイズの寄与が増大

当面はL=24のみについてのみ議論

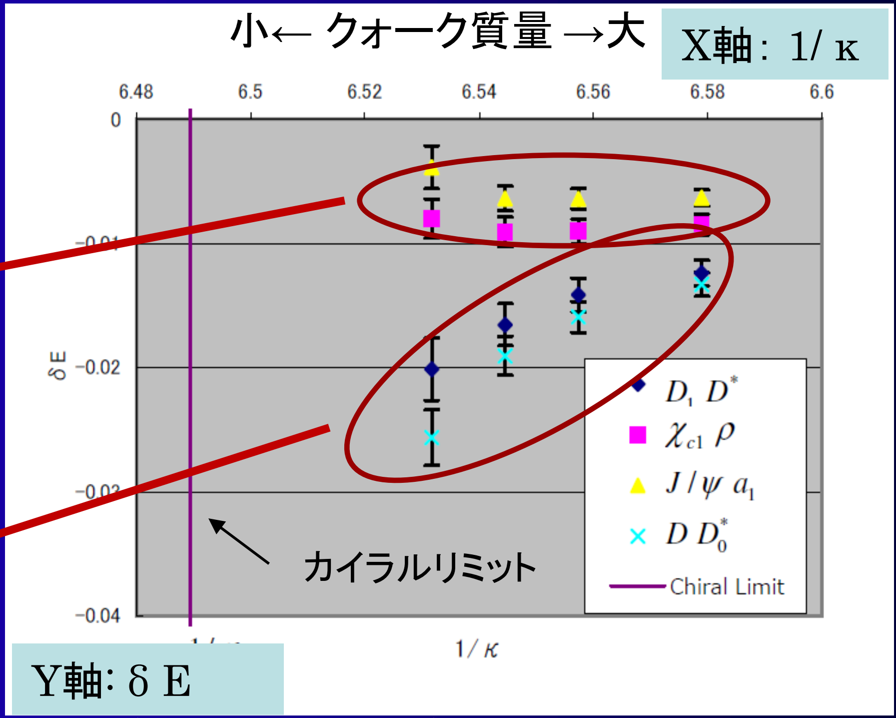
エネルギー固有値の解析(1)

- ハドロン間の相互作用の目安となる

$$\delta E = E_{m_1 m_2} - (m_1 + m_2)$$

の振る舞いをチェックする

- チャーモニウムと軽い中間子の系
  - ① 弱い引力
  - ② クォーク質量依存性：無
- D中間子系
  - ① より強い引力
  - ② クォーク質量依存性：有



Fig：各チャンネル，各クォーク質量でのδE

2つの系で異なる振る舞い ⇒

Gパリティの固有状態への射影をとったことによる影響を示唆

エネルギー固有値の解析(2)

●全ての系で引力的な振る舞いがみられたため、

ルシャーの公式

$$k\cot\delta_0(k) = -\frac{1}{\pi L} Z(1,\eta)$$

k→0 として
高次の散乱パラメータを無視

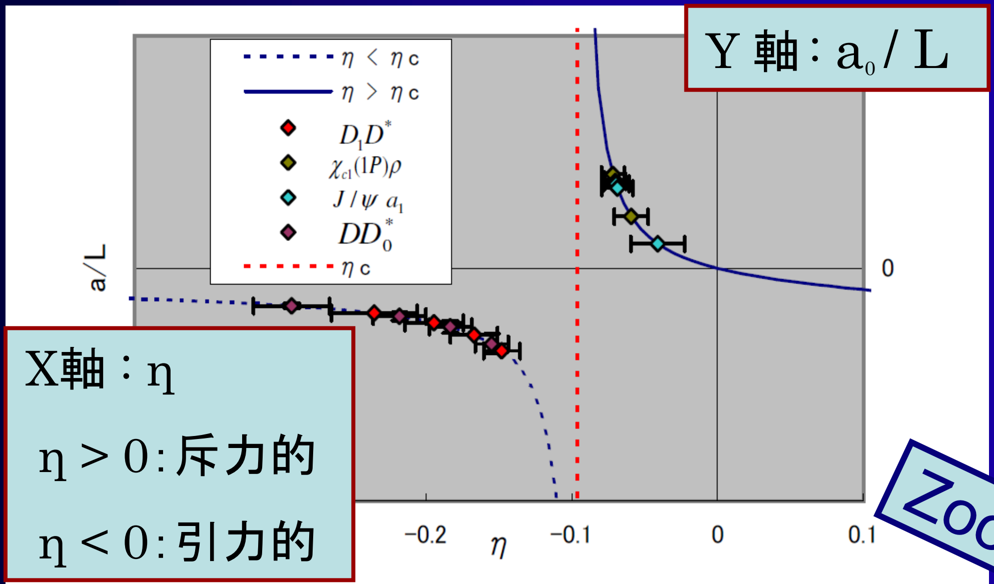
$$\frac{a_0}{\pi L} \approx -\frac{1}{Z(1,\eta)}$$

$$\begin{cases} \eta \equiv \dfrac{L^2 k^2}{4\pi^2} \approx \dfrac{L^2 \mu \delta E}{2\pi^2} \\ \delta E = E_{m_1 m_2} - (m_1 + m_2) \end{cases}$$

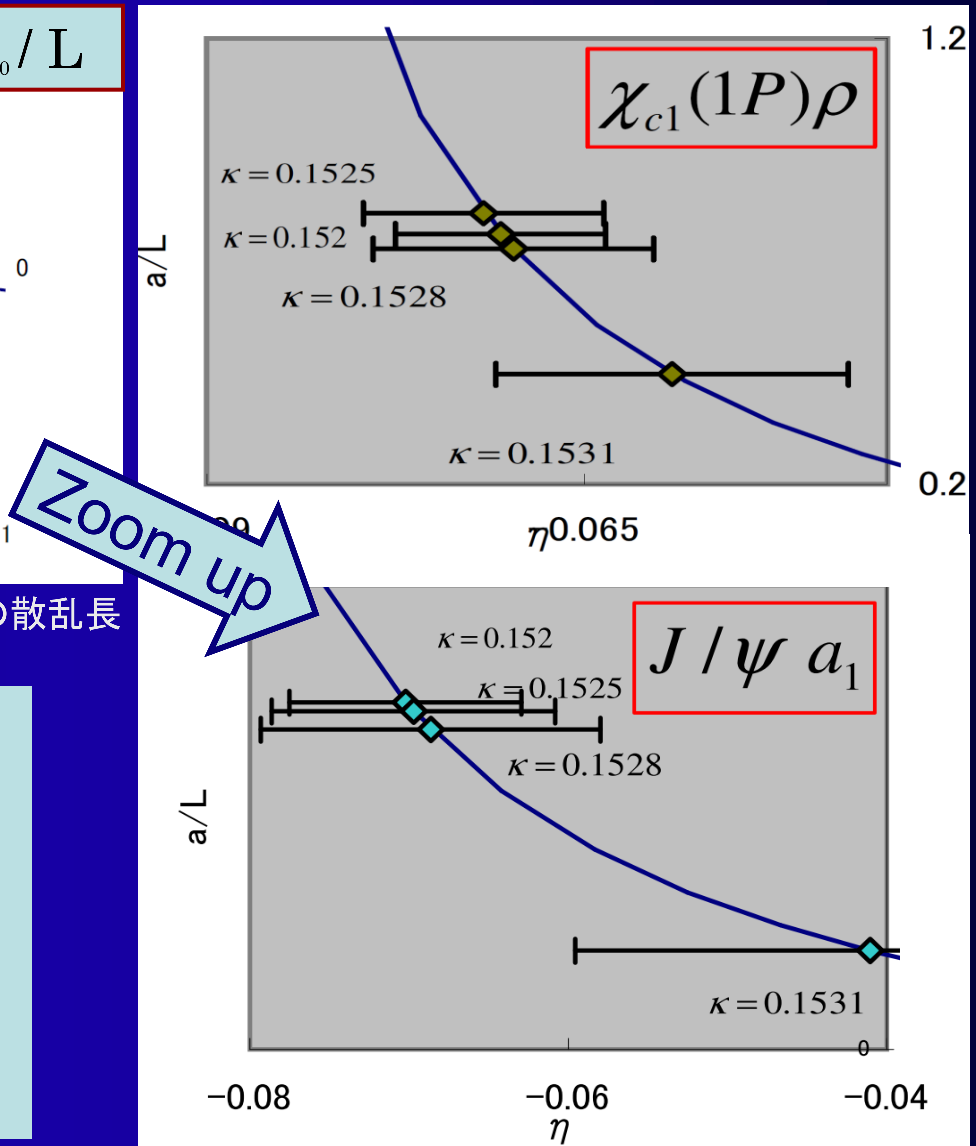
μ: 換算質量

を用いて各状態の分類・散乱長の計算を行っていく。

各チャンネルの状態の分類:(チャーモニウムと軽い中間子の系)



Fig：L=24での　全てのチャンネル，各クォーク質量の散乱長

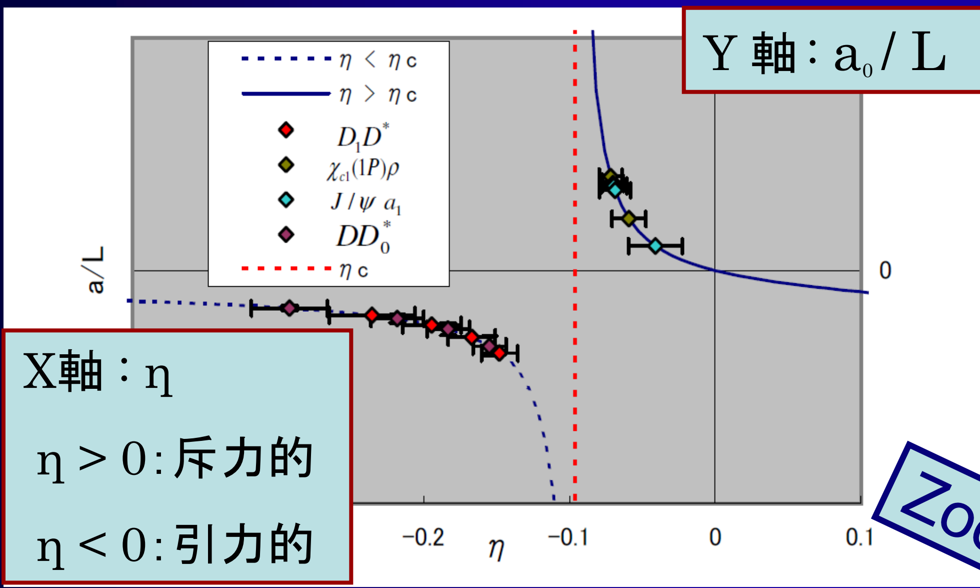


- チャーモニウムと軽い中間子の系
  - η< 0,　a_0~1 [fm] > 0

⇨ 引力的な散乱状態

  - 統計誤差の範囲でクォーク質量依存性は見えない

各チャンネルの状態の分類:(D中間子の系)



Y 軸 : a_0 / L

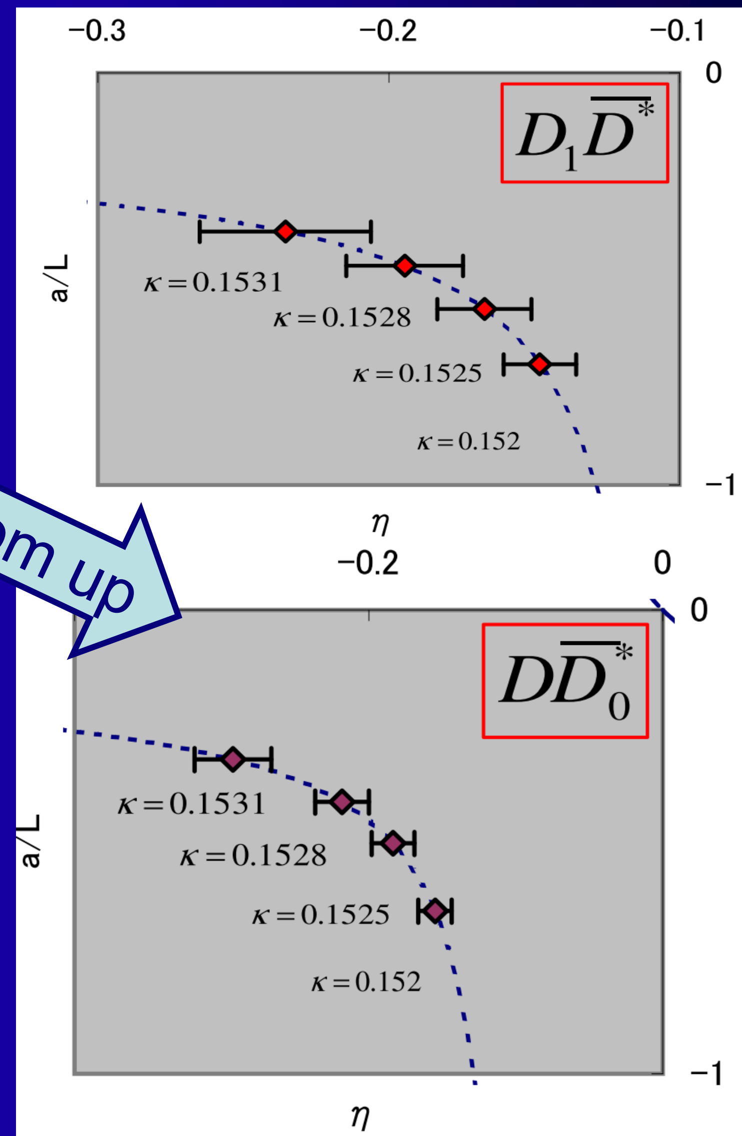
X軸 : η

η > 0 : 斥力的

η < 0 : 引力的

Fig : L=24での　全てのチャンネル，各クォーク質量の散乱長

Zoom up



- D中間子の系
  - ➢ $\eta < \eta_c < 0$, $a_0 < 0$

⇨ **束縛状態を示唆**

  - ➢ クォーク質量依存性は有意

束縛エネルギー

- S行列の極を調べる

$$\gamma + k\cot\delta_0(k)\big|_{k^2=-\gamma^2} \approx 0$$

$$E_b \equiv -\frac{\gamma^2}{2\mu}$$

E_b :束縛エネルギー

μ : 換算質量

$$\sim \delta E - \frac{1}{2\mu}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \eta_c$$

D中間子散乱のkをE_bへ変換

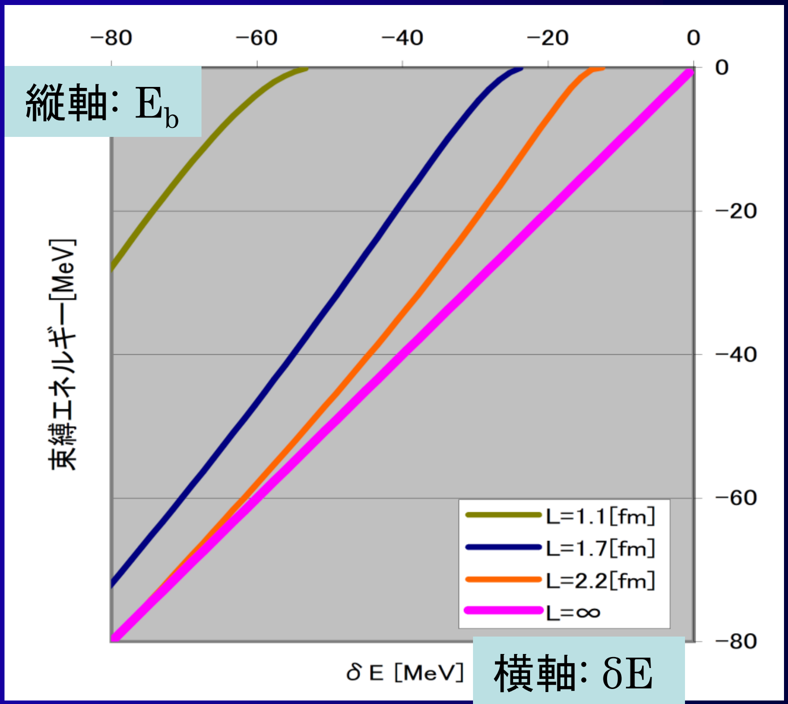


Fig) δEに対するE_bの振る舞い(μはD1D*にセット)

体積依存性の調査

- 粒子間の相互作用が非常に小さければ
  - 散乱状態 $\delta E \propto \frac{1}{L^3}$
  - 束縛状態 $\delta E \propto \frac{1}{L^2}$?
- L=16と比較した際の不整合(箱が小さすぎたため?)

より大きな体積での計算が，望まれる

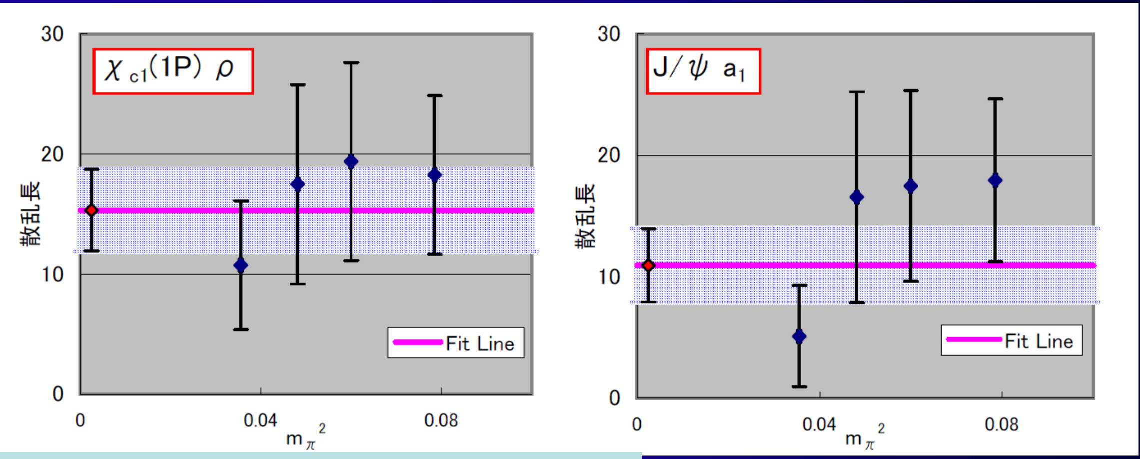
物理的極限への外挿

- *L=24* で得られた物理量に $m_\pi \approx 140[\mathrm{MeV}]$ へ外挿を施す

① チャーモニウム・中間子散乱

$a_0 = c_0$ （c_0: 定数）

$$a_{0\,\chi_{c1}(1P)\rho} = 1.07 \pm 0.24\,[\mathrm{fm}]$$
$$a_{0\,J/\psi a_1} = 0.77 \pm 0.21\,[\mathrm{fm}]$$

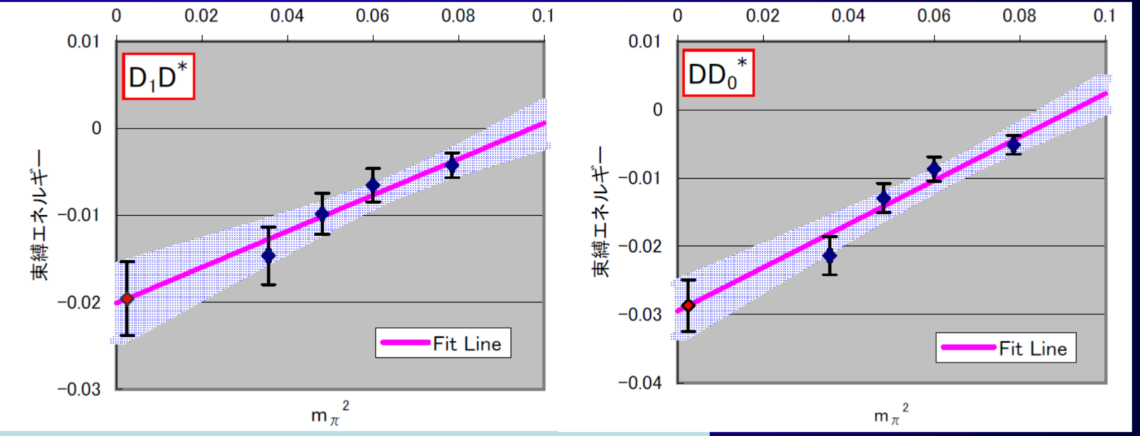


Y軸：a_0(散乱長)　X軸：m^2_π

② D中間子散乱

$E_b = c_0 + c_1 m_\pi^{\,2}$ (c_0, c_1: 定数)

$$E_{b\,D_1 D^*} = -55 \pm 12\,[\mathrm{MeV}]$$
$$E_{b\,DD_0^*} = -81 \pm 11\,[\mathrm{MeV}]$$



Y軸：Eb(束縛エネルギー　X軸：m^2_π

4. Summary & Future Plan

まとめ

- Z(4430)と結合するチャーム中間子系の散乱長の計算を行なった。
- 得られた散乱長より, これらのチャンネルには

全て引力的な相互作用が働くことがわかった

① チャ—モニウム - 軽い中間子の系　$\bar{c}c - \bar{d}u$ ： weak

→ クォーク質量依存性 : 殆んど無し

② D中間子の系　$\bar{c}u - \bar{d}c$ ： strong

→ クォーク質量依存性 : Gパリティによる状態の混合を通じて影響

→ Z(4430) が D_1 と $\bar{D}^*$ ($\bar{D}_1$ と D^*)の分子状態であることを示唆

展望

- Improvement ： larger lattice box, full QCD simulation, …
- Other hadrons ： $Z_1(4050)$, $Z_2(4250)$, T_{cc} , $\bar{D}$-N分子…