2002年度前期課程　熱力学　例題1　　解答例
担当教官：松井　哲男　　クラス：理I　01-03,06,12,19,26

解答例作成：松尾　衛　(6月4日作成)

8.（断熱圧縮と仕事）

解答例　$T_1 = 293[\mathrm{K}]$、$T_2 = 773[\mathrm{K}]$、$p_1 = 1.01 \times 10^5[\mathrm{N/m^2}]$、$\gamma = C_p/C_v = 1.4$ とおき、20 ℃における体積 V_1、500 ℃における体積、圧力をそれぞれ V_2、p_2 とする。断熱圧縮なので、

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

が成立する。よって、

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} &= \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ &= \left(\frac{293}{773}\right)^{\frac{1}{1.4-1}} \\ &= 0.0853 \end{aligned}$$

つまり、8.85 %に圧縮すればよい。また、理想気体の状態方程式より、空気の物質量は一定なので、

$$\begin{aligned} \frac{p_1 V_1}{T_1} &= \frac{p_2 V_2}{T_2} \\ p_2 &= p_1 \times \frac{T_2}{T_1}\frac{V_1}{V_2} \\ &= 3.01 \times 10^6 \mathrm{N/m^2} \end{aligned}$$

を得る。この際に必要な力 F とすると、

$$F = 3.01 \times 10^6 \mathrm{N/m^2} \times 1.00 \times 10^{-2} \mathrm{m^2} = 301\mathrm{N}$$

を得る。重力加速度 $g = 9.8\mathrm{m/s^2}$ を用いると、F は、重さ

$$F/g = 30.7\mathrm{kg}$$

のおもりを持ち上げる力に相当する。

　またこの断熱圧縮でなされる仕事 W は、熱力学第 1 法則より

$$W = C_v(T_2 - T_1)$$

である。ここで、C_v は、はじめの体積を V とすると、気体の状態方程式 $pV_1 = nRT_1$ より

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{nR}{C_v} \\ C_v &= \frac{1}{1-\gamma} \times nR = \frac{1}{1-\gamma} \times \frac{p_1 V}{T_1} \end{aligned}$$

と表せる。従って、

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{1-1.4} \times \frac{1.01 \times 10^6 V}{293} \times (773 - 293) \\ &= 4.14 \times 10^6 V[\mathrm{J}] \end{aligned}$$

を得る。

講評　ほとんどの人が出来ていましたが、中には、解析的な式変形だけで留まり、具体的な数値を代入した計算がなされていない答案も散見されました。具体的な値を代入することによって、初めて実感が湧く、という体験をしていただきたい、というのが出題の意図です。本レポート問題のような比較的簡単な具体例を通じて、抽象的な熱力学を少しでも身近に感じたいものです。

9.（音速と断熱過程）

解答例　圧力、体積、温度、空気の密度をそれぞれ (p, V, T, ρ) とする状態から、断熱過程によって状態 $(p+dp, V+dV, T+dT, \rho+d\rho)$ へ微小変化させるとする。断熱過程ゆえ、Poisson の式

$$pV^\gamma = \mathrm{const.}$$

が成り立つ。両辺を微分すると

$$dp \cdot V^\gamma + p\gamma V^{\gamma-1} dV = 0$$

となり、この両辺を pV^γ で割ることにより、

$$\frac{dp}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \qquad (1)$$

を得る。一方、空気の総重量は不変なので、

$$\rho V = \mathrm{const.}$$

が成り立つ。両辺を微分すると、

$$d\rho \cdot V + \rho dV = 0$$

すなわち、

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} \qquad (2)$$

を得る。式 (1)(2) より、$\frac{dV}{V}$ を消去すると、

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= \gamma \frac{d\rho}{\rho} \\ \frac{dp}{d\rho} &= \gamma \frac{p}{\rho} \end{aligned}$$

を得る。よって、

$$v_s^2 = \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}$$

が示せた。気体の状態方程式 $pV = nRT$ および、$\rho = mn/V$ より

$$\begin{aligned} v_s &= \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{1.4 \times 8.31 \times 288}{28.8 \times 10^{-3}}} = 341[\mathrm{m/s}] \end{aligned}$$

を得る。

講評　ほとんどの人が出来ていました。前半の音波と圧力・密度の関係式の導出には、いくつかのバリエーションがありましたが、どれも本質的には同等でしたから、あえて別解として記すことは省きます。

11.（大気の温度勾配）

解答例　Poisson の式 pV^γ =const. の両辺の log をとり、

$$\log p + \gamma \log V = \text{const.}$$

この式を微分すると、

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

を得る。同様に、気体の状態方程式 $pV = nRT$ の両辺の log をとった後、微分すると

$$\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$$

となる。dV/V を消去すると、

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} \tag{3}$$

を得る。この式に、状態方程式を変形して得られる関係式 $pm = \rho RT$ 及び流体静平衡の式 $g\rho\, dh = -dp$ を代入すると、

$$\begin{aligned} dT &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{p} dp \\ &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{p} (-g\rho) dh \\ &= -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{gm}{R} dh \end{aligned}$$

すなわち、

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{gm}{R}$$

を得る。従って、空気の温度勾配は、

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{1.4 - 1}{1.4} \times \frac{9.8 \times 28.8 \times 10^{-3}}{8.31} = -9.7 \times 10^{-3} \text{K/m}$$

となる。

また、1 モルあたりの大気の内部エネルギー U とエンタルピー H はそれぞれ、

$$\begin{aligned} U &= C_v T \\ H &= U + pV = C_v T + RT = C_p T \end{aligned}$$

と表せるので、両辺を微分し、式 (4) を代入すると、

$$
\begin{aligned}
dU &= C_v dT \\
&= -C_v \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{gm}{R}dh \\
dH &= C_p dT \\
&= -C_p \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{gm}{R}dh
\end{aligned}
$$

を得る。$C_v = R/(\gamma-1)$、$C_p = R\gamma/(\gamma-1)$ を代入すると、それぞれ、

$$
\begin{aligned}
\frac{dU}{dh} &= -\frac{gm}{\gamma} = -8.1 \times 10^{-2}\mathrm{K/m} \\
\frac{dH}{dh} &= -gm = -7.1 \times 10^{-2}\mathrm{K/m}
\end{aligned}
$$

となる。

講評　前半は比較的良く出来ていましたが、後半の内部エネルギーとエンタルピーに関する問題は、多くの人が苦戦していたようです。

大気中の温度勾配が、

$$
\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{gm}{R} = \mathrm{const.}
$$

で与えられる、ということは、T は h に関して 1 次式（傾き負）である、ということです。

1 モルあたりの大気の内部エネルギー $U = C_v T$ とエンタルピー $H = C_p T$ はそれぞれ、T の 1 次式ですから、同時に h に関しても 1 次式であることが分かります。

また、

$$
\begin{aligned}
dU &= -\frac{gm}{\gamma}dh \\
dH &= -gmdh
\end{aligned}
$$

という式から分かるように、dU は γ に依存しますが、dH は γ に依存しないという事実に注意しておいて下さい