2002年度 前期課程　　熱力学　例題1　　5月9日出題

担当教官: 松井哲男　　　　クラス： 理 I 01-03, 06, 12, 19, 26

---

1. （熱の仕事等量）800W の湯沸かし器で 10 ℃の水 500cc を沸騰させるのには何分かかるか？ただし、電熱器の発生する熱は全て水に吸収されるものとする。また湯が沸騰し始めてから空になるまでの時間を求めよ。

2. （等温膨張と仕事）1 モルの理想気体が温度 300K で等温膨張し体積が 2 倍になるとき、外界にする仕事 W はいくらか？

3. （熱力学第一法則）熱力学第一法則は、系の状態変化において系が受け取る熱量 ΔQ と仕事 ΔW との和が系の変化のしかたに依らず、始状態と終状態によって一意的に決まることを主張する。これは、状態量としての内部エネルギーの存在を意味している。すなわち、その始状態と終状態の値を、それぞれ、U_1、U_2 とすると、

$$U_2 - U_1 = \Delta Q + \Delta W$$

という関係をみたす状態量 U が定義でき、これを内部エネルギーと呼ぶ。これにたいし、熱量と仕事が状態量とならないことを説明しなさい。

4. （状態量の完全微分）熱力学第一法則は、状態量としての内部エネルギー U の存在を意味している。これは数学的には、U は他の任意の二つの物理量の関数として表され、その微小変化が完全微分で表されることを意味している。今、U を温度 T と体積 V の関数とすると、内部エネルギーの微小変化は温度と体積の微小変化をつかって

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

と書くことができる。また、U を温度 T と圧力 p の関数とすると、内部エネルギーの微小変化は温度と圧力の微小変化をつかって

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T dp$$

と表すこともできる。体積 V がやはり状態量で、その微小変化を温度と圧力の微小変化を使って表すことを用いて、$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ と $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p$ の関係を求めなさい。

5. （定積比熱と定圧比熱）全問で得られた結果を用いて、第一法則より定積熱容量 C_V と定圧熱容量 C_p の間に次の関係が成り立つことを示しなさい。

$$C_p = C_V + \left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

また、この関係式を理想気体に用いて Mayer の式

$$C_p - C_V = nR$$

を導きなさい。

6. （内部エネルギーとエンタルピー）1.2gr の炭素を容積 50l のシリンダーの中で 1 気圧で燃焼させた時、気体の内部エネルギー、エンタルピー、温度がどう変化するか計算しなさい。ただし、炭素の完全燃焼による燃焼熱は 1 モル当たり 97kcal である。またこのとき気体の膨張によってされる仕事 W を計算しなさい。但し、最初シリンダーの中には全ての炭素を完全燃焼させるのに必要な酸素が含まれていたものとする。ここで、エンタルピー (enthalpy) は、

$$H = U + pV$$

で定義される状態量である。

7. （Joule-Thomson の細孔栓実験）シリンダーのまん中を細孔栓のついた壁で仕切り、両側をピストンで閉じた装置を考える。始めに左側の容器に圧力 p_1、体積 V_1 の気体を閉じ込める。右側のピストンは仕切りにくっつけこの部分には気体は入っていないようにする。ゆっくり二つののピストンを右に動かして、仕切りの左側の気体を細孔栓をとおして反対側に断熱的に移す。但し、移動した気体は圧力が常に p_2 で一定となるようにピストンに働く力を調節することができるものとする。この過程の前後で、気体のエンタルピーが保存されることを示しなさい。また、理想気体では温度変化がないことを示しなさい。

8. （断熱圧縮と仕事）温度 20 ℃、1 気圧（$1\text{atm} = 1.01 \times 10^5 \text{N/m}^2$）の空気を断熱圧縮して温度を 500 ℃に上昇させるにはどれだけ圧縮する必要があるか？ただし、$\gamma = C_p/C_V = 1.4$ を用いなさい。これを断面積が 1cm^2 の片端が塞がったシリンダーで行うとき、終状態でピストンにどれだけの力をかける必要があるか？それは何 kg のおもりを持ち上げる力に相当するか計算しなさい？また、この断熱圧縮でなされる仕事 W の総量はいくらか？

9. （音速と断熱過程）空気中の音波 v_s は空気の密度を $\rho = m/V$ とすると

$$v_s^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

で与えられる。音波が伝わる際に、圧力と密度の微小変化が断熱的におこるとして

$$v_s^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$$

となることを示しなさい。この結果はラプラス（P.S.Laplace）によって初めて得られた。これを使って気温 15 ℃、1 気圧における空気中の音速を計算しなさい。ただし、空気の平均分子量を $m = 28.8\text{g/mol}$ とし、$R = 8.31\text{J/mol}\cdot$ T を用いなさい。

10. （断熱圧縮率と等温圧縮率）断熱圧縮率 $\kappa_{\text{ad.}} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{\text{ad.}}$ と等温圧縮率 $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ の間に

$$\kappa_T = \gamma \kappa_{\text{ad.}}$$

の関係があることを示しなさい。また、音速が $\kappa_{\text{ad.}}$ を使って、一般に、

$$v_s^2 = \frac{1}{\rho \kappa_{\text{ad.}}}$$

となることを示しなさい。この関係を用いて、0 ℃、1 気圧での空気の断熱圧縮率と等温圧縮率の値を求めなさい。ここで、$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{\text{ad.}}$ は、断熱的（adiabatic）に圧力を変化させた時の体積の変化率を表す。理想気体の場合は、Poisson の式（$pV^\gamma = \text{const.}$）を使って計算することができる。

11. （大気の温度勾配）大気の温度は高度が増すにつれて減少する。空気は熱伝導が悪く、この温度勾配は空気の対流によって起ると考えられる。地上で熱せられた空気が対流によって上昇すると断熱膨張して冷却され、逆に下降する際は断熱圧縮により加熱される。空気の流れが緩やかであるとすると、空気の密度を ρ、重力加速度を g とすれば、大気の高さの微小変化 dh による圧力変化 dp は、力の釣り合いより

$$g\rho dh = -dp$$

で与えられる（流体静平衡の式）。この式と断熱過程に関するポアッソン（Poisson）の式、$pV^\gamma = \text{const.}$、気体の状態方程式、$pV = nRT$、を用いて、大気中の温度勾配が

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{gm}{R}$$

で与えられることを示せ。ここで空気の平均分子量 m、気体定数 R、γ に問 3 の値を用いて、温度勾配の値を計算しなさい。また、１モルあたりの大気の内部エネルギー U とエンタルピー $H = U + pV$ がそれぞれ高さとともにどう変わるか示しなさい。