2015 年度 前期課程　　力学　レポート問題２解答例　　6 月 26 日

担当教員: 松井哲男　　クラス：１年理 II, III 1- 6

問題３（指数関数表示）Euler（オイラー）の関係式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を使って

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$$

の両辺を計算すると、

$$\begin{aligned}\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\end{aligned}$$

両辺の実数部と虚数部を比較すると。

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2, \qquad (1)$$

$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \qquad (2)$$

が得られる。同様に

$$e^{3i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^3$$

より

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i\sin 3\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta + i(-\sin^3\theta + 3\sin\theta\cos^2\theta) \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + i(-4\sin^3\theta + 3\sin\theta)\end{aligned}$$

両辺の実数部と虚数部を比較すると、

$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}\left(\cos 3\theta + 3\cos\theta\right), \qquad (3)$$

$$\sin^3\theta = \frac{1}{4}\left(-\sin 3\theta + 3\sin\theta\right). \qquad (4)$$

が得られる。

問題９　（重力のポテンシャル）地球を半径 R、質量 M の一様な球とすると、地表にある質量 m の物体に働く重力は、地球の中心に向かって、強さが

$$G\frac{Mm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \qquad (5)$$

となり、これは下向きに重力加速度 ($g = 9.8\mathrm{m/s^2}$) が

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (= 9.8\mathrm{m/s^2}) \qquad (6)$$

で与えられることを意味する。地球の半径を $R = 6400$ km とすると、地表から 100km 上空を飛ぶ質量 m の人工衛星は、地球の中心から半径 $r = 6500$ の円軌道にあり、回転角速度 ω は、遠心力と重力の釣り合い条件

$$mr\omega^2 = G\frac{Mm}{r^2}$$

より、

$$\omega^2 = G\frac{M}{r^3} = G\frac{M}{R^2}\frac{R^2}{r^3} = g\frac{R^2}{r^3} = \frac{9.8\times(6400\times10^3)^2}{(6500\times10^3)^3}\ \mathrm{s}^{-2} = \frac{1}{(827\ \mathrm{s})^2} \qquad (7)$$

その回転周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 5.2 \times 10^3 \text{ s} \ \ (= 87 \text{ 分}) \tag{8}$$

となる。静止衛星は地球の自転周期（T= 1 日= 86400s）でまわっているから、地球の中心からの距離は

$$r^3 = \frac{GM}{\omega^2} = \frac{gR^2}{\omega^2} = \frac{gR^2T^2}{(2\pi)^2} = \frac{9.8 \times (6400 \times 10^3)^2 \times 86400^2}{2\pi^2} \tag{9}$$

より、

$$r = 4.2 \times 10^7 \text{m}$$

これは、地球の半径の 6.6 倍の距離で、地表から 3.6 万 km の距離になる。

問題 10（地球縦貫トンネル） トンネルの中心から計った質点の位置を x とする。但し x は中心の反対側で符号を変え、トンネルの内部で $-R < x < R$ の値をとるものとする。地球を密度

$$\rho_0 = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}$$

の半径 R の球とみなすと、ガウスの法則により地球の重心から x の位置にある質量 m の質点に働く重力は、半径 $r = |x|$ の球の内側にある物質とおなじ質量

$$M(r) = \frac{4\pi}{3}r^3\rho_0 = M\frac{r^3}{R^3}$$

をもった質点が地球の中心からこの物体に及ぼす重力に等しいから、

$$F = -\frac{GmM(r)}{r^2}\frac{x}{r} = -\frac{GmM}{R^3}x$$

この力の大きさは地表（$x = R$）で gm に等しいから、

$$F = -\frac{gm}{R}x$$

従って、このトンネルの中を自由落下する質点の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gm}{R}x$$

となり、これは固有振動数

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \tag{10}$$

の調和振動子の運動方程式となる。$g = GM/R^2 = 9.8\text{m/s}^2$、$R = 6400$ km を用いると、その周期は

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{6.4 \times 10^6\text{m}}{9.8\text{m/s}^2}} = 5.1 \times 10^3\text{s} = 85\text{min.}$$

となる。

一方、空気抵抗がないとき地表すれすれを回る人工衛星の角速度 ω は、遠心力と重力の釣り合いで決まり、

$$m\omega^2R = \frac{GmM}{R^2}$$

これより

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3} = \frac{g}{R}$$

となり、その回転周期 $T = 2\pi/\omega$ は上で求めた調和振動子の周期と一致する。

問題 11 （惑星の運動）

(9) 式より得られた

$$r^2\dot{\phi} = h \tag{11}$$

を (7) 式の左辺の第 2 項に代入してこの項を右辺に移項すると、

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2},$$

両辺に換算質量 μ を掛けると。

$$\mu\ddot{r} = \frac{\mu h^2}{r^3} - \frac{GM\mu}{r^2},$$

従って、有効ポテンシャルを

$$V_{\mathrm{eff.}}(r) = \frac{\mu h^2}{2r^2} - \frac{GM\mu}{r}, \tag{12}$$

で定義すると、動径方向の運動方程式は

$$\mu\ddot{r} = -\frac{dV_{\mathrm{eff.}}}{dr}$$

となる。

有効ポテンシャル (12) は定数だけの不定性があることに注意。ここでは無限遠点（$r = \infty$）での有効ポテンシャルの値を 0 ととった。有効ポテンシャル (12) の第 1 項は遠心力のポテンシャルと考えることができる。角運動量の大きさ（向きは公転面に垂直）を L とすると、$L = \mu r^2\dot{\phi} = \mu h$ であるから、

$$V_{\mathrm{eff.}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}, \tag{13}$$

となる。第 1 項は、角運動量 L、慣性モーメント μr^2 の回転運動のエネルギーを表す。