2015 年度 前期課程　　力学　レポート問題１解答例　　5 月 29 日

担当教員: 松井哲男　　クラス：１年理 II, III 1- 6

---

**問題１**　（位置ベクトルと速度ベクトル）位置ベクトル、$\mathbf{r} = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), 0)$ の速度ベクトルは、

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-R\omega\sin(\omega t), R\omega\cos(\omega t), 0) \tag{1}$$

速度ベクトルが $x$ 軸の負の方向を向くのは、$\omega t = 1\pi/2 + 2n\pi$ の時で、最初にそうなるのは、$n = 0$ のとき、すなわち $t = 0$ の時で、このときの位置ベクトルは、

$$\mathbf{r} = (0, R, 0). \tag{2}$$

**問題６**　（エネルギー・運動量の保存則）固定された滑らかな斜面を滑りお落ちる場合、エネルギーの保存則より、

$$gmh = \frac{1}{2}mv^2 \tag{3}$$

ここで $v$ は斜面に沿った物体の速さを表す。これを $v$ について解くと、

$$v = \sqrt{2gh} \tag{4}$$

が得られる。この結果は質量 $m$ や斜面の傾斜角度 $\theta$ には依らない。また、斜面に沿った運動量は増加しているが、これは重力と、斜面が落下物体に及ぼす抗力によってされる力積によって生じていることに注意。

この斜面を水平方向の滑らかな斜面の上に質量 $M$ の物質で作ったときは、質量 $m$ の物体の斜面に沿った落下とともに、滑り台も水平面上で反対方向に動き始める。今、水平面を $(x, y)$ 平面として運動の方向を $x$ 軸にとり、上下方向を $z$ 軸にとる。斜面に対する物体の速度を $\mathbf{v} = (v\cos\theta, 0, -v\sin\theta)$ とおくと、 斜面が速度 $\mathbf{V} = (-V, 0, 0)$ で動いているときは、水平面に固定された座標系では、

$$\mathbf{v}' = (v\cos\theta - V, 0, -v\sin\theta) \tag{5}$$

となり、$x$ 方向の運動量の保存から、

$$MV = m(v\cos\theta - V) \tag{6}$$

ここで、右辺は右方向の物体の運動量を表す。また、エネルギーの保存則は、

$$gmh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m\left[(v\cos\theta - V)^2 + (v\sin\theta)^2\right] \tag{7}$$

となる。この 2 つの式を $v$ と $V$ について解けばよい。

まず、(7) より、

$$V = \frac{m}{M+m}v\cos\theta. \tag{8}$$

これをエネルギー保存則 (8) に代入して、右辺から $V$ を消去すると、

$$gmh = \frac{m(M + m\sin^2\theta)}{2(M+m)}v^2$$

が得られ、これより、

$$v = \sqrt{\frac{2(M+m)gh}{M + m\sin^2\theta}} \tag{9}$$

(9) に代入すると、

$$V = \sqrt{\frac{2m^2\cos^2\theta gh}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}} \tag{10}$$

となる。$M \to \infty$ の極限を取ると、$v \to \sqrt{2gh}$、$V \to 0$ となり、動かない坂の場合の解と一致する。

**問題 7**　（1 次元の衝突）滑らかな面上で静止した質量 $M$ の物体 1 に質量 $m$ の物体 2 が速さ $v$ で弾性衝突したとき、衝突後のそれぞれの物体の速度（正負を含む）を $V$、$v'$ とする。但し、運動は常に直線に沿った 1 次元的な運動であるとする。運動量の保存則より、

$$mv = MV + mv' \quad , \tag{11}$$

また、エネルギーの保存則から、

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \quad . \tag{12}$$

式 (12) より、

$$V = \frac{m}{M}(v - v') \quad , \tag{13}$$

これを、(13) に代入し、両辺を $m/2$ で割ると、

$$v^2 = \frac{m}{M}(v - v')^2 + v'^2 \quad .$$

従って、$v'$ は、

$$(m + M)v'^2 - 2mvv' + (m - M)v^2 = 0 \quad . \tag{14}$$

をみたす。これは $v'$ について 2 次方程式なので解は 2 つ存在し、

$$v' = v, \tag{15}$$

または、

$$v' = \frac{m - M}{m + M}v \tag{16}$$

前者は衝突の前と同じで、これは 1 次元衝突ではあり得ないので、(17) を物理的な解として採用すると、(14) より、

$$V = \frac{2m}{m + M}v \quad , \tag{17}$$

が得られる。（注）$M > m$ のとき $v' < 0$。これは、軽い物体が静止した重い物体にぶつかったとき反跳で運動の向きが変わることを意味している。その時の運動量の変化は、

$$\Delta p = m(v - v') = \frac{2mM}{m + M}v$$

で $M$ が大きい程大きい。これは、重いものにぶつかったとき程、衝撃が大きくなることを意味する。また、衝突する相手が同じ質量のとき ($M = m$) は、$v' = 0$ で、ぶつかったものは、衝突後、運動量 $p = mv$ を全て相手に移し、静止することを意味する。