2015 年度 前期課程　　力学　例題3　　7 月 3 日出題

担当教員: 松井哲男　　クラス：１年理 II, III 1 - 6

---

1. （座標系の並進変換と慣性力）座標系 S の原点の時間に依存した並進移動をベクトル $\boldsymbol{r}_0(t)$ で行うと、新しい座標系 S' での質点の位置ベクトル $\mathbf{r}'$ は元の座標系（慣性系）の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と,

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0(t) + \boldsymbol{r}'(t) \tag{1}$$

という関係にある。ものと慣性系 S での運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$ は、新しい座標系 S' では、

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{F} - m\ddot{\boldsymbol{r}}_0 \tag{2}$$

と書け、右辺の第２項はみかけの力（慣性力）を表す。

地球の中心から距離 R の円軌道を周回する宇宙船内では無重力状態となることをこの式を使って示せ。

2. （回転座標系）いまある慣性系にたいし等角速度 ω で回転する座標系を考える。回転軸の方向を z 軸に選び、回転の向きが右ねじの進む向きになる様に、z 軸の正の向きをとる。元の慣性系の x、y、z 座標軸を指定する３つの単位ベクトル、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ と、この原点のまわりに回転する座標系の座標軸を指定する３つの単位ベクトル、$\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$ との間には、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}' &= \cos(\omega t)\boldsymbol{i} + \sin(\omega t)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j}' &= -\sin(\omega t)\boldsymbol{i} + \cos(\omega t)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k}' &= \mathbf{k} \end{aligned}$$

という関係がある。いま、角速度ベクトル ω を、

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k} \tag{3}$$

で定義すると、任意のベクトル $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} = A'_x\boldsymbol{i}' + A'_y\boldsymbol{j}' + A'_z\boldsymbol{k}'$ の時間微分は

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\delta\boldsymbol{A}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A} \tag{4}$$

と表されることを示せ。ここで、右辺の第１項

$$\frac{\delta\boldsymbol{A}}{\delta t} \equiv \dot{A}'_x\boldsymbol{i}' + \dot{A}'_y\boldsymbol{j}' + \dot{A}'_z\boldsymbol{k}' \tag{5}$$

は回転座標系におけるベクトル $\boldsymbol{A}$ のみかけの時間変化を表し、第２項は座標軸が回転しているためうけるベクトル $\boldsymbol{A}$ の時間変化を表す。（４）式の関係は、回転ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の向きの取り方に依らず成り立つ。

3. （回転座標系における慣性力）前問の結果より、注目する質点の位置ベクトルの時間変化は、

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} &= \frac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} & (6) \\ \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= \frac{\delta^2\boldsymbol{r}}{\delta t^2} + 2\boldsymbol{\omega}\times\frac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta t} + \frac{\delta\boldsymbol{\omega}}{\delta t}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) & (7) \end{aligned}$$

と表される。ここで、右辺に現れる、$\delta\boldsymbol{r}/\delta t$、$\delta^2\boldsymbol{r}/\delta t^2$ は、それぞれ、回転系でみた質点のみかけの速度 $\boldsymbol{v'}$ と加速度 $\boldsymbol{\alpha'}$ を表す。これを、もとの運動方程式 $m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$ の左辺に代入し、一様な回転座標系（$\frac{\delta\boldsymbol{\omega}}{\delta t} = 0)$ でみると質点にどのようなみかけの力が現れるか説明せよ。必要であれば、公式、$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ を用いよ。

4. （地表における遠心力の効果）地球を半径 $R = 6400\mathrm{km}$ の球とした時、赤道における地球の自転に伴う遠心力と重力の比を求めよ。北緯 36 度にある東京ではこの比はどうなるか？この比が 1 となるには、地球の自転速度（１日の長さ）はどうならなければならないか？

5. （コリオリ力と台風の風向き）北半球では台風の風向きは、台風の目（中心）の北側では東風、南側では西風となることが知られている。これを台風の中心に向かう地表付近の気流に働くコリオリ力により説明せよ。

6. （フーコーの振り子）地球上の緯度 θ の地点で振り子を揺らすと、その振動面は時間とともにゆっくり回転することが知られている。慣性系で振り子の振動面は変化しないが、地球が自転しているため地上の観測者には振り子の振動面が回転している様に見えるためである。これは、振り子に働くコリオリ力の効果として理解できる。地表に固定した座標系でおもりの位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ ととる。ここで、ひもの支点を座標原点に取り、x 方向として地球の回転軸の向きに垂直な東向き、z 方向は地表に垂直な上向きにとる。振り子の垂線からのゆれの角度が小さいとき、重力とひもの張力の和による復元力は、近似的に

$$\boldsymbol{F} \simeq -gm\frac{x}{l}\boldsymbol{i} - gm\frac{y}{l}\boldsymbol{j} \tag{8}$$

と表される。一方、地球が角速度 ω で北極と南極を通る軸の周りに回転していることによって生じるコリオリ力は、

$$\boldsymbol{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = 2m\omega\sin\theta v_y\boldsymbol{i} - 2m\omega\sin\theta v_x\boldsymbol{j} \tag{9}$$

となる。ここで、θ は振り子のおかれている場所の緯度を表す。

振動面の回転角速度が $\omega\sin\theta$ となることを示せ。東京は北緯 36 度に位置するが、１日でフーコーの振り子の振動面はどれだけ回転するか？

7. （剛体の運動方程式）剛体とは広がりを持つが形の変わらない物体を意味する。その定義から、剛体の運動は、その重心の運動と、重心の周りの剛体の向きの変化の運動との重ね合わせで記述でき、自由度の数は重心運動３と回転運動３の合わせて６となる。これは２体系の自由度（重心運動３＋相対運動３）と等しいが、２体系の相対座標はその向きだけでなく、大きさも変わりうるところが異なる。剛体の内部自由度は、全て剛体の向きの変化の自由度である。剛体の運動方程式は、この 6 つの自由度に対して、

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{F}, \tag{10}$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}, \tag{11}$$

と表すことができる。最初の式は、剛体の重心の運動方程式で、$\boldsymbol{P}$ は剛体の全運動量、$\boldsymbol{F}$ は剛体に働く力の和である。また、２番目の式は剛体の重心の周りの回転運動を記述する式で、$\boldsymbol{L}$ は３つの回転軸の周りの剛体の角運動量、$\boldsymbol{N}$ は重心の周りの回転にたいする外力のモーメント（トルク）を表す。剛体を小さなセルに分割して i 番目のセルの質量 (m_i)、位置ベクトル (r_i)、運動量 $(\boldsymbol{p}_i)$、角運動量 $(\boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i)$、セルに働く力 $(\boldsymbol{f}_i)$ を用いて、セル毎の運動方程式を書き、それからこの剛体の運動方程式を導け。ニュートンの第３法則（作用反作用の法則）は $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{N}$ に対して何を意味するか？

8. （剛体の慣性モーメント）剛体のある軸の周りの角速度 ω の回転に対して、その軸方向の角運動量 L が、

$$L = I\omega \tag{12}$$

となる時、I をこの回転軸の周りの慣性モーメントと呼ぶ。以下の場合の慣性モーメントを求めよ。

   (a) 質量 M、半径 R の球殻がその中心を通る軸のまわりの回転。球殻の厚みは R に比べて無視できる程小さいものとする。

   (b) 質量 M、長さ l の細長い一様な棒の中心の周りの回転。

(c) 質量 M、半径 R の一様な円盤の中心を通って、円盤面に垂直な軸の周りの回転。回転軸が重心を通る円盤上の線の場合はどうか？

9. （剛体の運動エネルギー）剛体の運動エネルギーは、重心運動のエネルギーと重心の周りの回転のエネルギーの和で与えられることを示せ。半径 R、長さ l、質量 M の中空の円筒が、水平面からの角度 θ で傾いた斜面を滑らないで距離 d ころがり落ちたとき、重心運動の速度ベクトルの大きさ V と円筒の回転の速さ ω を求めよ。重力加速度を g とし、円筒の厚みは R に比べて無視できる程小さいものとする。

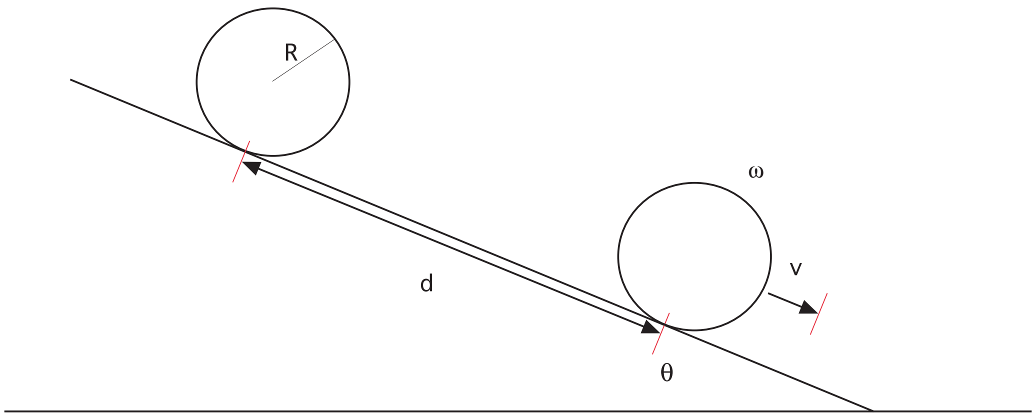

図 1: 斜面を転がり落ちる円筒

10. （トルクと剛体の回転）水平面におかれた円柱の剛体に力を加えて転がすには、どこに、どの向きに力を加えるのがもっとも効果的か？その理由を示せ。

11. （コマの才差運動）角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で中心軸の周りを回るコマは、重力の効果で才差運動（首振り運動）を行う。すなわち、回転軸は垂線方向から傾き、支点を通る垂線の周りをある角速度 Ω でゆっくりと回る。コマの支点から重心までの距離を h とし、コマを半径 R の一様な円盤で作ったときの、才差運動の周期 Ω を求めよ。

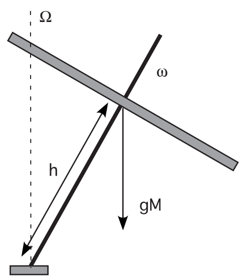

図 2: コマの才差運動