2015 年度 前期課程　　力学　例題 2　　6 月 5 日出題

担当教員: 松井哲男　クラス：クラス：１年理 II, III 1- 6

---

1. （調和振動）質量 m のおもりが天井からバネでつり下げられている。このおもりの上下方向の一次元的な運動は調和振動となる。平衡点からの上方向の変位を x とし、x の従う運動方程式を求めよ。但し、バネ定数を k とし、重力加速度を g とおく。また、その運動方程式の一般解を求め、初期条件として平衡点から下に力 f_0 で引っぱり、そっと離したときの解を求めよ。

2. （円運動と調和振動）質量 m の質点が半径 R の円周上を等角速度 ω で円運動している。この運動を記述する運動方程式の x 方向、y 方向の射影が、それぞれ角振動数 ω の調和振動子の運動方程式になることを示しなさい。

3. （指数関数表示）Euler（オイラー）の関係式、$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ より、三角関数は
$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right), \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$
と表される。この関係式を用いて、次の公式を導きなさい。
$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2, \tag{1}$$
$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2, \tag{2}$$
$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}\left(\cos 3\theta + 3\cos\theta\right), \tag{3}$$
$$\sin^3\theta = \frac{1}{4}\left(-\sin 3\theta + 3\sin\theta\right). \tag{4}$$

4. （調和振動子の一般解の指数関数表示）調和振動子の運動方程式, $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -\omega^2 x$、の一般解、$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$ は、複素指数関数を使って
$$x(t) = C_+ e^{\mathrm{i}\omega t} + C_- e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{5}$$
と表すことができる。C_+、C_- を A、δ を使って表しなさい。

5. （振り子）長さ l の紐で釣り下げられたおもりの運動方程式が
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{6}$$
となることを示し、θ が小さいときの微小振動の振動数を求めなさい。ここで、θ は紐が垂線と成す角である。

6. （摩擦があるときの運動）床の上を水平に運動する質量 m のおもりに摩擦力 $\mathbf{F} = -\eta\mathbf{v}$ が働くときの運動方程式の解を求めよ。但し、初期条件として最初のおもりの位置と速度を、それぞれ、$\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0)$、$\mathbf{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ とする。おもりが x 方向にバネで壁に繋がれているときの運動方程式を書き、その一般解を求めよ。但し、バネ定数 k は $\sqrt{k/m} > \eta/(2m)$ の条件をみたすものとし、おもりは x 方向に 1 次元的な運動をすると考える。

7. （重心運動と相対運動の分離）バネでつながれた 2 つのおもりの 1 次元的運動を考える。おもりの質量を m_1、m_2 とし、バネ定数を k とする。それぞれのおもりの位置の変位 x_1、x_2 の従う運動方程式から、重心座標 $X = (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1 + m_2)$ と相対座標 $x = x_1 - x_2$ の従う運動方程式を導け。相対運動は調和運動となることを示し、その振動数 ω を求めよ。また、エネルギーを重心運動と相対運動のエネルギーに分離し、それぞれが保存されることを示せ。

8. （中心力の下での相対運動）２体力で相互作用し合っている２質点の相対運動を考える。この２体力が相対距離 r だけの関数 $V(r)$ で表される場合、力のベクトルの向きは相対座標 $\mathbf{r}$ の向きになることを示せ。このとき相対運動は原点を含む平面上に拘束される。相対座標を極座標表示して、動径座標 r と方位角 φ を使って運動方程式を表せ。また、その一つの運動方程式から、$r^2\dot{\varphi}$ が時間によらないことを示せ（面積速度一定則）。これは角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ の保存を意味することを示せ。また、もう一つの運動方程式から、エネルギーの保存則を導け。

9. （重力のポテンシャル）逆２乗則に従う重力では、一様な球殻上の質量分布が内部の質点に及ぼす力は相殺して０となり、外部の質点には球殻上の質量がすべて中心にある場合と同じ力を及ぼす。従って、地球を半径 R、質量 M の一様な球と考えると、その表面にある質量 m の物体と地球の引力の大きさは GMm/R^2 で与えられる。これより重力加速度 $g = 9.8\mathrm{m/s}^2$ を重力定数 G、地球の質量 M、地球の半径 R を用いて表せ。それを使って、地球の半径を $R = 6400$ km とし、地表から 100km 上空を飛ぶ人工衛星の回転周期を求めよ。但し、人工衛星と大気の摩擦は無視できるとする。静止衛星の場合、地球からの距離はどれだけとなるか？

10. （地球縦貫トンネル）地球を密度一様の球だと考える。地球の表面のある地点から、地球の中心を通って反対側に抜ける真直ぐな穴を掘ったとする。この穴にある物体を落とすと調和振動する。その振動数を重力定数 G、地球の質量 M と半径 R を使って表わしなさい。$R = 6400$ km、また地表での重力加速度 $g = GM/R^2 = 9.8\mathrm{m/s}^2$ を用いて、この調和振動の周期 $T = 2\pi/\omega$ を計算しなさい。また、空気抵抗がないとき、地表すれすれを周回する人工衛星の回転周期がこの調和振動の周期に等しくなることを示しなさい。地表のある場所から別の場所（例えば東京とニューヨーク）まで真直ぐなトンネルをほり、その中を摩擦なしで重力の力のみで動く列車を走らせた時、この列車の運動はやはり調和振動となる。その周期はどうなるか？

11. （惑星の運動）太陽の周りの惑星の運動は、近似的に太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描くことが知られている（ケプラーの第１法則）。１つの惑星に注目し、他の惑星や小天体の影響を無視すると、太陽と重力によって相互作用するこの惑星から太陽までの距離 r と方位角 φ の従う運動方程式は、

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{r^2} \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0 \tag{8}$$

で与えられる。ここで、G はニュートンの重力定数、M は太陽と惑星の重心の質量を表す。(9) 式は、問題 10 で考察した様に、中心力の場合一般的に成り立つ式で、角運動量の保存を意味する。いま、

$$r^2\dot{\varphi} = h \tag{9}$$

とおき、(8) 式に代入して動径方向の運動方程式を求めよ。また、その式から、

$$\ddot{r} = -\frac{d}{dr}V_{\mathrm{eff.}}(r) \tag{10}$$

をみたす、動径方向の運動の有効ポテンシャル $V_{\mathrm{eff.}}(r)$ を求め、その意味を述べよ。

12. （ケプラーの法則と万有引力）ケプラーの第１法則によると太陽の周りの惑星の運動の軌道は太陽を一つの焦点とする楕円を描く。この焦点から惑星までの距離を r、楕円の中心から焦点をとおる直線と焦点から惑星をとおる直線の成す角を φ とした時、楕円の方程式は、

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon\cos\varphi} \tag{11}$$

と表される。ここで、ϵ は、楕円の離心率 (eccentricity) と呼ばれ、円軌道 ($\epsilon = 0$) からのずれを表す。この式が、上問で求めた運動方程式を満たすことを示し、r_0 の値を、GM、h を用いて表せ。離心率 ϵ は何によって決まるか？

13. （ケプラーの第３法則）ケプラーの第３法則によると、太陽の周りの惑星の回転周期 T の２乗は回転半径 R の３乗に比例し、惑星の質量に依らない。円運動の場合に、この法則を運動方程式 (7)、(8) から導け。一般に楕円運動の場合、楕円軌道の周期は楕円の面積 $\pi r_0^2/(1-\epsilon^2)^{3/2}$ を、面積速度 $h/2$ で割ることによって求まる。この場合も、R を楕円の長軸半径 $a = r_0/(1-\epsilon^2)$ で置き換えれば、第３法則が成り立つことを示せ。