2015 年度 前期課程　　力学　例題１　　5 月 1 日出題

担当教員: 松井哲男　　クラス：１年理 II, III 1- 6

---

1. （位置ベクトルと速度ベクトル）z 軸に垂直な xy 平面上で座標軸の原点から半径 R の円周上を角速度 ω で等速回転運動する質点の時刻 t の位置ベクトルは、

$$\mathbf{r} = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), 0) \tag{1}$$

と表される。ここで時刻 $t = 0$ におけるこの質点の位置を x 軸上にとった。時刻 t におけるこの質点の速度ベクトルを求めなさい。但し、必要であれば次の三角関数の微分の公式を用いなさい。

$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta, \qquad \frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta. \tag{2}$$

また、速度ベクトルが x 軸の正の方向を向く時の位置ベクトルを求めなさい。

2. （慣性の法則）ニュートンの第１法則（慣性の法則）は、力が働かないと、物体の運動は等速直線運動になることをいう。逆に、そのような慣性の法則の成り立つ系を、慣性系と定義する。慣性系の具体的な例をあげよ。

3. （力と加速度）ニュートンの第２法則によると、慣性系において質量 m の物体に力 $\mathbf{F}$ が働くと、その力の方向に加速度 $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ が生じる。これは逆に力の定義を与える。すなわち、慣性系において質量 m の質点の運動に加速度 $\mathbf{a}$ が生じた場合、この質点に力 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ が作用したと考える。上問の等速円運動の場合、質点の質量を m として、質点にかかっている力 $\mathbf{F}$ の時間変化を求めよ。

4. （運動方程式と初期値問題）ニュートンの第２法則を位置ベクトル $\mathbf{r}$ を用いて表すと、

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \tag{3}$$

と書かれ、これはベクトル関数 $\mathbf{r}(t)$ に対する２階の微分方程式となっている。$\mathbf{F}$ がわかっているとき、この方程式を解いて $\mathbf{r}(t)$ を一意的に決めるには、2 つの初期値、すなわち $\mathbf{r}(0)$ と $\mathbf{v}(0)$ の値を与える必要がある。これを運動方程式の初期条件とよぶ。逆に、初期条件を変えると同じ運動方程式に従う運動も違ったものになる。

一様重力場中の質点の運動は、位置ベクトルと速度ベクトル の初期値 $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ を用いて、

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{e}_z \tag{4}$$

となることを示せ。ここで、重力の向きを z 軸の負の向きに取り、g は重力加速度、$\mathbf{e}_z$ は z 軸正の向きの単位ベクトルである。

5. （作用反作用の法則と運動量の保存則）２つの質量 m_1 と m_2 の質点１と２がお互いに力を及ぼし合っているとき、慣性系では、質点１が質点２に及ぼす力 $\mathbf{F}_{12}$ と質点２が質点１に及ぼす力 $\mathbf{F}_{21}$ は互いに向きが反対で等しい大きさとなる。この作用反作用の法則から、全運動量 $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ が運動の保存量となることを示せ。

6. （エネルギー・運動量の保存則）水平方向から角度 θ で傾斜した滑らかな斜面を、質量 m の物体が高さ h から滑り落ちたとき、この物体の最終速度 v を求めなさい。今、この斜面を水平方向の滑らかな斜面の上に質量 M の物質で作ったとき、この斜面を質量 m の物体が高さ h から滑り落ちたとき、斜面と物体の速度はどうなるか？

7. （１次元の衝突）滑らかな面上で静止した質量 M の物体１に質量 m の物体２が速さ v で弾性衝突した。衝突後のそれぞれの物体の速さ V、v' をエネルギー・運動量の保存則を用いて求めなさい。