2015年度 前期課程　　力学　数学的補足１　　5月1日

担当教員: 松井哲男

---

1. （ベクトルの座標表示と微分）

   位置ベクトル $\mathbf{r}$ は、デカルト座標表示で、

   $$\mathbf{r} = (x, y, z),$$

   と与えられる。それぞれの座標軸に固定された単位ベクトル、$\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$、$\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$、$\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$、を用いると、

   $$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z,$$

   と表すこともできる。速度ベクトル $\mathbf{v}$ は位置ベクトル $\mathbf{r}$ の時間微分で、

   $$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

   で定義され、成分ごとに、

   $$\mathbf{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z,$$

   と表される。位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ が描く質点の運動の軌跡を用いると、速度ベクトルは質点の位置から引いた接線の向きのベクトルとなっている。

2. （ベクトルの内積と外積）

   二つのベクトルがそのデカルト座標表示で、$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$、$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ で与えられたとき、この二つのベクトルの内積は、それぞれの成分の積の和、

   $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

   で与えられ、外積は、

   $$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x)$$

   で与えられる。

   この二つのベクトルの成す角度を θ とすると、内積は

   $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta,$$

   また外積のベクトルの大きさは、

   $$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB\sin\theta$$

   で、その向きはベクトル $\mathbf{A}$ とベクトル $\mathbf{B}$ が張る面に垂直で、右ねじの進む方向になる。

   例題１：　ベクトル $\mathbf{A}$ とベクトル $\mathbf{B}$ が直交するとき $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$、また平行のとき $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ となることを示せ。

3. （関数の積の微分）いま変数 x の関数 $F(x)$ が、2つの関数 $f(x)$、$g(x)$ の積で $F(x) = f(x)g(x)$ と与えられたとき、$F(x)$ の微分は、

   $$\frac{dF}{dx} = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

   で与えられる。特に、$f(x) = g(x)$、すなわち、$F(x) = f^2(x)$ のとき、

   $$\frac{dF}{dt} = 2f\frac{df}{dx}$$

   例題２：　倍角の公式 $\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1$ の両辺を x で微分し、もう一つの公式 $\sin(2x) = 2\cos x \sin x$ を使って結果が一致することを示せ。

4. （偏微分とナブラ）

偏微分の定義：2 変数関数 $f(x,y)$ が与えられたとき、

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

を、それぞれ、f の x についての（１階の）偏微分、y についての偏微分（partial differential, partial derivative) とよぶ。この定義より、例えば、実際に $\frac{\partial f}{\partial x}$ を計算するときは、y を定数とみなして $f(x,y)$ を x の１変数関数と考え、通常の x についての微分を実行すれば良い。

高階の偏微分：関数 $f(x,y)$ の偏微分、$\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$ も、また、変数 (x,y) の関数であり、それを更に偏微分して $f(x,y)$ の高階の偏微分を定義することができる:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \ , \quad \text{etc.}$$

幾何学的意味：$z = f(x,y)$ とおくと、この関係式は３次元ユークリッド空間 (x,y,z) の上で曲面を描く。偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$ は、それぞれこの曲面上の点 $(x, y, f(x,y))$ で曲面に接する平面（接平面）の x 方向、y 方向の傾きとなっている。

例題３：

(a) 2 変数関数 $f(x,y) = ax^3 + bx^2y + cy^2$ の偏微分、$\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$、を計算しなさい。

(b) 上問の関数の高階の偏微分 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$、$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$、$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を計算し、最後の 2 つが等しいことを示しなさい。

ポテンシャルとナブラ ∇：

力学ででてくる質点のポテンシャル U は、位置ベクトル $\mathbf{r}$ の関数で、３変数 (x,y,z) 関数となっている。質点に働く力 $\mathbf{F}$ はベクトル量で、

$$\mathbf{F} = -\nabla U \tag{1}$$

と表わされる。ここで、∇ はナブラと呼ばれるベクトル微分演算子（differential operator）で、ベクトルの成分で書くと、

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \quad .$$

∇U は U の勾配（gradient）と呼ばれる。すなわち、関数 $U(x,y,z)$ の x 方向、y 方向、z 方向の傾きを与える。式 (**??**) の右辺の負符号はポテンシャル U が小さくなる方向に力が働くことを意味する。このような関数 U が存在するとき、$\mathbf{F}$ を保存力と呼ぶ。保存力の下で質点が運動するとき、運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和、

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U$$

は時間変化しない保存量となる。

中心力ポテンシャル：

ポテンシャル U が原点からの距離 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ だけの関数のとき、$\mathbf{F}$ は中心力と呼ばれる。

例題４：　$\nabla r = (x/r, y/r, z/r) = \hat{r}$ となることを示し、中心力が

$$\mathbf{F} = -\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{dU}{dr}$$

と書けることを示せ。