2015年度 前期課程　　物理学・電磁気Aコース　レポート問題2略解

担当教員: 松井哲男

問題1 （静電エネルギーと核分裂）電荷密度ρで一様に帯電した半径rの球の表面の静電ポテンシャルは電荷$q(r) = (4/3)\pi r^3\rho$の電荷が距離r離れた場所に作る静電ポテンシャルの値$\phi(r) = q(r)/4\pi\epsilon_0 r = \rho r^2/3\epsilon_0$。この球の半径を$r + \Delta r$にすると、電荷は$\Delta q = 4\pi\rho r^2\Delta r$だけ増加するので、この電荷をクーロン力に逆らって遠方からもってくるのに必要な仕事ΔWは、$\Delta W = \phi(r)\Delta q$となる。従って、電荷$Q$をもつ一様に帯電した半径$R$のもつ静電エネルギーは

$$U = \int_0^R \frac{4\pi}{3}\frac{\rho^2}{\epsilon_0}r^4 dr = \frac{4\pi}{3}\frac{\rho^2 R^5}{5\epsilon_0}$$

ここで、$Q = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$を用いると、

$$U = \frac{3}{5}\times\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \tag{1}$$

が得られる。

ウラン原子核のもつ静電エネルギーは、半径$R = 7\times10^{-15}$mの球に、$Z = 92$個の陽子のもつ電荷$Ze = 92\times1.6\times10^{-19}$Cが一様に分布していると考えると、

$$U = \frac{3}{5}\times\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{3}{5}\times(92\times1.6\times10^{-19})^2\times9.0\times10^9/(7.0\times10^{-15}) = 1.7\times10^{-10}\ [\mathrm{J}]$$

となる。$1\ \mathrm{eV} = 1.6\times10^{-19}\ \mathrm{J}$をもちいると、

$$U = 1.0\times10^9\ [\mathrm{eV}]$$

ウラン核が半径R'、電荷Q'の二つの同じサイズの球形の核に分裂したとすると、$R' = 2^{-1/3}R$、$Q' = Q/2$であるから、このとき放出される静電エネルギーは、

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{3}{5}\times\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} - 2\times\frac{3}{5}\times\frac{(Q')^2}{4\pi\epsilon_0 R'} = U\times\left(1 - 2\times2^{-2}\times2^{1/3}\right)\\ &= 0.37\times10^9\ [\mathrm{eV}]\end{aligned}$$

が得られる。

表面張力があると、表面積を小さくするように働き、表面積に比例した正のエネルギーが付加される。これは、表面で対となる核子間の数が減少し、核力（凝集力）による結合エネルギーが減少することによる。球形核が体積が同じ2つの球形核に分裂すると、表面積の増加がおき、静電エネルギーの減少は、この表面エネルギーの増大により、上で求めた値より小さくなる。実際には約0.2×10^9 [eV] となることが知られている。これは通常の化学反応（酸化）によってえられるエネルギーの数百万倍の大きさである。

問題2 （ベクトル場の発散と回転）

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = c(2xz, 2yz, x^2+y^2) \tag{2}$$

のとき、

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = 4cz \tag{3}$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = 0 \tag{4}$$

なので、これは静電場となり、その静電ポテンシャルは

$$\phi(\mathbf{r}) = -c(x^2+y^2)z + \mathrm{const.}$$

で与えられる。

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \;\; = \;\; c(yz, xz, z^2) \tag{5}$$

のとき、

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \;\; = \;\; 2cz \tag{6}$$
$$\nabla \times \mathbf{F} \;\; = \;\; (-cx, cy, 0) \tag{7}$$

なので、これは静電場でも静磁場でもない。

問題 6 （静電ポテンシャルと電荷分布）静電ポテンシャル、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{ce^{-ar}}{r} \tag{8}$$

をポアッソンの方程式

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{9}$$

の左辺に代入して $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ を用いて計算すればよい。一般に r の関数 $f(r)$ に対して、

$$\nabla f(r) = \frac{df}{dr}\nabla r = \frac{df}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

また、$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ を用いると、

$$\Delta\phi \;\; = \;\; \nabla^2 f(r) = \frac{d^2 f}{dr^2}(\nabla r)^2 + \frac{df}{dr}\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr}$$

$f(r) = \frac{ce^{-ar}}{r}$ とおくと

$$\Delta\phi \;\; = \;\; = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr} = ca^2\frac{e^{-ar}}{r}$$

従って、電荷密度分布は

$$\rho(r) = -\epsilon_0\Delta\phi = -\epsilon_0 ca^2\frac{e^{-ar}}{r} \tag{10}$$

となる。

この計算は

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rf)$$

となる事を使うともっと簡単に出来る。

[コメント] このような電荷分布は、プラズマ中のに置かれた荷電粒子の周りにおいて実際に実現される。プラズマは物質を構成する原子が高温・高密度で電子とイオンに分解し、それらの荷電粒子が自由に動き回る様になった状態であるが、そこに外部電荷を挿入するとその周りに正負反対の電荷をもったプラズマ粒子が集まり、外部電荷が遮蔽（しゃへい）される。このためプラズマ中で二つの電荷に働くクーロン力は、荷電粒子間の距離の増大に対し、真空中の場合の逆 2 乗則ではなく、指数関数的に減衰するようになる。a の逆数は長さの次元をもち、遮蔽距離と呼ばれる。

問題 10 （一様電場中の導体球）原点に置かれた半径 R の導体球に一様な外部電場 $\mathbf{E}$ をかけると、導体中には電荷の変極がおこり、導体球の表面と内部で静電ポテンシャルが一定となる。一方、導体が無いとき、座標軸の原点に置かれた電気双極子と一様電場の作る静電ポテンシャルとの重ね合わせでできる静電ポテンシャル

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{r} \tag{11}$$

は $\mathbf{E}=\mathbf{p}/(4\pi\epsilon_0 R^3)$ をみたす半径 R の球面上で 0 となるので、前者の問題の解と導体球の外側で一致する。

導体球の表面では電場は表面に垂直方向にでき、その電荷密度の大きさ σ はこの静電ポテンシャルの r 方向の微分で $E=\sigma/\epsilon_0$ から得られる。従って、一様電場と $\mathbf{p}$ の方向に z 軸をとり、表面上の座標を極座標を用いて、$\mathbf{r}=(R\cos\phi\sin\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\theta)$、と表すと、

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}-E\cos\theta r=E\cos\theta\left(\frac{R^3}{r^2}-r\right) \tag{12}$$

であるから、$r\geq R$ で電場の大きさは、

$$E(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{\partial}{\partial r}\phi(\mathbf{r})=E\left(\frac{2R^3}{r^3}+1\right)\cos\theta$$

となる。従って、

$$\sigma(\theta) \;=\; \epsilon_0 E(\theta, r=R)=3\epsilon_0 E\cos\theta$$

が得られる。すなわち、電場の方向に正電荷が、反対方向に負電荷が誘起される。

問題 11 （コンデンサーと電気容量）内側の半径 R_2 の円筒導体に電荷 Q 外側の半径 R_1 の円筒導体に電荷 $-Q$ をおくと、それぞれの電荷は一様に分布し、二つの円筒導体で挟まれた領域に電場ができる。中心軸の周りの回転対称性を使うと、中心軸から距離 r の場所での電場の強さ E_r は、半径 r、長さ L の円筒型のガウス面にガウスの法則を用いると、

$$2\pi r L E_r = Q/\epsilon_0$$

より、

$$E_r=\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} \tag{13}$$

が得られる。従って、両極の電位差は

$$\Delta\phi=\int_{R_2}^{R_1}E_r dr=\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

これよりこのコンデンサーの電気容量 C は、

$$C=\frac{Q}{\Delta\phi}=\frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}$$