2015年度 前期課程　　物理学・電磁気Aコース　レポート問題1略解

担当教員: 松井哲男

例題3 （電気四重極子の作る電場）

z 軸上の点 $(0,0,z)$ では、対称性より電場の x 方向、y 方向の成分は0となり、z 方向成分 E_z のみが生き残る。クーロンの法則より、それぞれの電荷からの z 方向成分への寄与の和を計算すると、

$$
\begin{aligned}
E_z &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{d^2+z^2} \times \frac{z}{(d^2+z^2)^{1/2}} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{d^2+z^2} \times \frac{z}{(d^2+z^2)^{1/2}} + \frac{-2q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{z^2} \\
&= \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{z}{(d^2+z^2)^{3/2}} - \frac{1}{z^2}\right) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

となる。ここで上の行の右辺の最初の2つの項は $\mathbf{r}_\pm = (\pm d, 0, 0)$ におかれた正の電荷 q からの寄与であり、その最後の項は原点におかれた電荷 $-2q$ からの寄与である。$d << z$ のとき、

$$
\frac{1}{(d^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{z^3} \times \left(1 + (d/z)^2\right)^{-3/2} \simeq \frac{1}{z^3} \times \left(1 - \frac{3}{2}(d/z)^2 + ...\right)
$$

と Taylor 展開し、(1) 式に代入すると、d/z の2次の項が残り、

$$
E_z(0,0,z) \simeq -\frac{3qd^2}{4\pi\epsilon_0 z^4}
$$

が得られる。

例題5 （円周上に分布した電荷の作る電場）電荷の分布した円周の中心を座標軸の原点にとり、z軸を円周面に垂直方向にとると、z軸に対する軸対称性より、z軸上では電場の向きはz軸方向になり、x、y方向の成分を持たないことがまずわかる。従って、以下の計算では、z方向の成分のみを考える。

クーロンの法則より円周上の微小線分 Δl 上に置かれた電荷 $\Delta Q = \lambda \Delta l$ が z軸上の点に作る電場の z方向成分は、

$$
\Delta E_z = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2+z^2} \cos\theta
$$

で、ここで θ は円周上の点からz軸に引いた直線がz軸となす角度である。

$$
\cos\theta = z/\sqrt{R^2+z^2}
$$

であることを用いて円周上で積分すると、

$$
E_z = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}
$$

が得られる。ここで、$Q = \lambda 2\pi R$ は円周上に分布する全電荷の量。$z >> R$ の遠方では、

$$
E_z \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}
$$

となり、原点に置かれた点電荷 Q の作る電場の z方向成分と一致する。

例題 6 （立体角）この問題はレポート問題にはしなかったが、 ガウスの法則の証明とも関連するので略解を与える。

地上から太陽を見たときの立体角（平均値）は、

$$\Omega_{\mathrm{Sun}} = \frac{\pi \times (6.96 \times 10^8)^2}{(1.50 \times 10^{11})^2} = 6.76 \times 10^{-5} \qquad (\mathrm{str})$$

月の立体角（平均値）は

$$\Omega_{\mathrm{Moon}} = \frac{\pi \times (1.74 \times 10^6)^2}{(3.84 \times 10^8)^2} = 6.45 \times 10^{-5} \qquad (\mathrm{str})$$

となり、両者はほぼ等しい。地球から太陽までの距離は季節変化があり、一番遠ざかる遠日点では太陽の立体角は月のそれより小さくなる。これが、皆既日食が起こる背景にある。半径 1cm の 1 円玉を目から xm 遠ざけたとき、その立体角が太陽の立体角と一致するには

$$\frac{\pi \times (1.0 \times 10^{-2})^2}{x^2} = 6.8 \times 10^{-3}$$

より、

$$x = 2.16 \quad (\mathrm{m})$$

が得られる。

例題 8 （一様に帯電した球殻の作る電場）図 2 (a) の電荷分布の場合、対称性より電場の向きは球の中心から外に向かった放射状になり、電場の強さは球殻の中心からの距離 r のみの関数となる。このことを考慮して、ガウスの法則を半径 r の球面（ガウス面）に用いると、

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_{\mathrm{tot}}(r)}{\epsilon_0}$$

ここで、$q_{\mathrm{tot}}(r)$ は半径 r の球の中に含まれる全電荷で、題意より

$$q_{\mathrm{tot}}(r) = \begin{cases} 0 & r \le R' \\ \frac{4\pi}{3}\frac{\rho}{\epsilon_0}\left(r^3 - R'^3\right) & R' < r \le R \\ \frac{4\pi}{3}\frac{\rho}{\epsilon_0}\left(R^3 - R'^3\right) & R < r \end{cases}$$

であるから、電場の強さにたいし

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r \le R \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(r - \frac{R'^3}{r^2}\right) & R' < r \le R \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{R^3 - R'^3}{r^2} & R < r \end{cases} \tag{2}$$

が得られる。

例題 9 この場合は球対称とはならないが、空洞の部分には半径 R' で電荷密度 $-\rho$ で一様に帯電した球があると考えれば、合わせの原理を使って電場を求めることができる。但し、いくつかの場合分けが必要となる。半径 R の球の中心を座標軸の原点に選び、半径 R' の空洞の中心の位置ベクトルを $\mathbf{d}$ とする。例えば、$|\mathbf{r} - \mathbf{d}| \le R'$ の場合、すなわち空洞内部では、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\mathbf{r} - \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\mathbf{d}$$

となり、一様電場となっている。空洞の外で、電荷分布の中では（$r \le R, |\mathbf{r} - \mathbf{d}| > R'$）

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\mathbf{r} - \frac{\rho R'^3}{3\epsilon_0}\frac{\mathbf{r} - \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^3} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\mathbf{r} - R'^3\frac{\mathbf{r} - \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^3}\right)$$

電荷分布の外 ($r > R_1$) では

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\rho R'^3}{3\epsilon_0}\frac{\mathbf{r} - \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^3} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(R^3\frac{\mathbf{r}}{r^3} - R'^3\frac{\mathbf{r} - \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^3}\right),$$

となる。$\mathbf{d} = 0$ のとき、この解は図 2 (a) の場合の解 (2) に一致する。