2015 年度 前期課程　　物理学・電磁気 A コース　例題 3　　11 月 27 日出題

担当教員: 松井哲男　　クラス：１年理 I（１９、２０）、理 II, III （１－４）

---

1. （電荷・電流密度と電荷の保存則）任意の平曲面 S の内部の電荷 Q と、この平曲面から外向きに流れる電流 I の間には、電荷の保存則から $I = -\frac{dQ}{dt}$ の関係がある。これを電荷密度 ρ と電流密度 $\mathbf{j}$ を用いて積分型で表すと、
$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j} = -\frac{d}{dt}\int_V dV \rho \tag{1}$$
と書かれる。これからガウスの積分定理を用いて
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{2}$$
を求めなさい。

2. （オームの法則と電気伝導率）電流密度 $\mathbf{j}$ と電場 $\mathbf{E}$ との間には比例関係
$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$
がある。これとオームの法則 $V = RI$ とを比較して、断面積 S、長さ d の導線の電気抵抗 R と電気伝導率 σ の間に
$$R = \frac{d}{\sigma S} \tag{3}$$
の関係があることを示しなさい。また、この関係を使って、同じ 2 つの抵抗を直列につないだ場合と、並列につないだ場合、抵抗値が、それぞれ、2 倍、1/2 倍になることを説明しなさい。

3. （RC 回路とジュール熱）抵抗値 R の抵抗と電気容量 C のコンデンサーを直列につないだ RC 回路を考える。こな回路に電流 I が流れている時、単位時間あたりに抵抗に発生する熱（ジュール熱）は $P = RI^2$ で与えられる。コンデンサーを電荷 Q で帯電して回路のスイッチを入れた後、単位時間あたりに抵抗 R から発生するジュール熱の時間変化を求めなさい。

4. （サイクロトロン運動）一様磁場中を磁場に垂直方向に速度 $\mathbf{v}$ で運動する質量 m、電荷 q の荷電粒子にはローレンツ力 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ が働き、この荷電粒子の軌跡は円を描く（サイクロトロン運動）。今、$x > 0$ の領域が一様磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ でみたされていると考える (図 1)。この領域に時刻 $t = 0$ に x 軸に沿って入射した電荷 q の荷電粒子の軌道は半円を描く。この荷電粒子が再び磁場のない領域に飛び出してくる時の時間 T と入射位置からの距離 L を求めなさい。荷電粒子の速さ v が 2 倍になると、T と L はどうなるか？

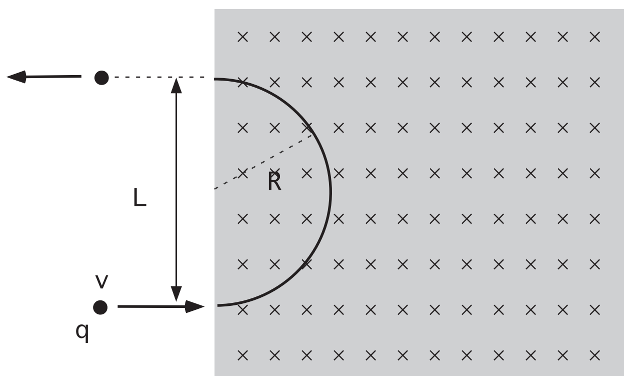

図 1: 一様磁場中に入射した荷電粒子の運動

5. （ビオ・サバールの法則）位置 $\mathbf{r}'$ で $\Delta\mathbf{r}'$ の向きに流れる電流素片が、位置 $\mathbf{r}$ に磁場

$$\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\Delta\mathbf{r}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{4}$$

を作ると考えて、直線上を流れる電流 I がこの直線から d 離れた位置につくる磁場の強さが、

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

となることを示しなさい。

6. （ベクトル・ポテンシャル）ビオ・サバールの法則 (4) を用いると、閉曲線 C に沿って流れる強度 I の電流が作る磁場は、線積分

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C \frac{d\mathbf{r}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{5}$$

で与えられる。これを

$$\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

を用いて、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla\times A(\mathbf{r}) \tag{6}$$

と書き直し、ベクトル・ポテンシャル $A(\mathbf{r})$ の表式を求めなさい。

7. （ベクトル・ポテンシャルの不定性）ベクトル・ポテンシャルを $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ ととると、これは、一様磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ を与えることを示しなさい。ベクトル・ポテンシャルを $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ とおいても同じ磁場を与えることを示しなさい。一般に, 任意のスカラー関数 $\chi(\mathbf{r})$ をもちいてベクトル・ポテンシャルを $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$ と変換しても同じ磁場を与えることを示しなさい。

8. （ループ電流と磁気双極子）ビオ・サバールの法則 (4) を用いて、半径 R の円周を流れる電流 I がこの円の中心を通り円に垂直な直線上に作る磁場を計算しなさい。また、問題 6 で求めたベクトル・ポテンシャル $A(\mathbf{r})$ の表式を用いて、このループ電流が遠方に作るベクトル・ポテンシャルを計算し、それから磁気双極子のつくる磁場の表式

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(-\mathbf{m} + 3\hat{r}(\hat{r}\cdot\mathbf{m})\right)$$

を導きなさい。ここで、

$$\mathbf{m} = \pi R^2 I\hat{n} = -\frac{I}{2}\oint_C d\mathbf{r}\times\mathbf{r}$$

は磁気双極モーメントで、$\hat{n}$ はその向きを表わす。[ヒント：$\mathbf{r} = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$ とおき、円周に沿っての線積分を θ についての積分で表わしなさい。]

9. （アンペールの法則）定常電流 I が作る静磁場は

$$\oint_C d\mathbf{l}\cdot\mathbf{B} = \mu_0\int_S d\mathbf{S}\cdot\mathbf{j} \tag{7}$$

の関係をみたす。ここで、左辺は閉曲線 C に沿った磁場の線積分であり、右辺はこの閉曲線を縁とする任意の平曲面 $\mathbf{S}$ を貫く電流である。左辺に Stokes の積分定理を用いて、微分型のアンペールの法則

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} \tag{8}$$

を導け。

10. （アンペールの法則の応用）大小２つのシリンダー型の導体が, 同じ中心軸を持つように配置されている（図２）。この導体に反対向きに同じ総量 I の電流をシリンダーの向きに沿って流した時にできる磁場を求めなさい。但し、それぞれのシリンダーの半径を a と b とし（$L >> a > b$)、電流は図示した向きに一様に流れているものとする。磁場の向きを断面図に示し、その強さをシリンダーの中心軸からの距離 r の関数として求めなさい。

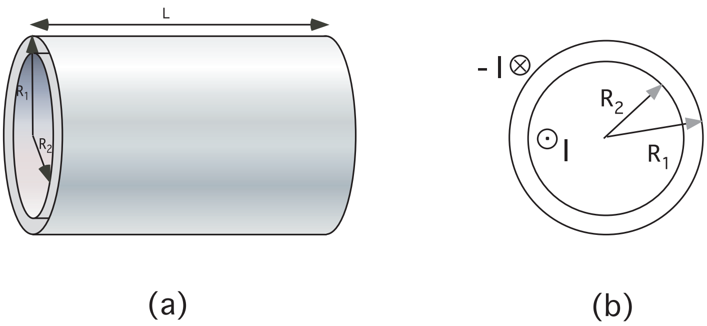

図 2: ２重シリンダー型導体とその断面図

11. （電磁誘導の法則）長く直線状にのびた導線の横に長方形の回路を図 3 のように置く。直線に交流電流 $I_1(t) = I_0 \cos(\omega t)$ を流したとき、長方形の回路を貫く磁束 Φ_B を計算し、回路に誘導される起電力 $\mathcal{E}(t)$ を電磁誘導の法則

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{9}$$

を用いて計算しなさい。

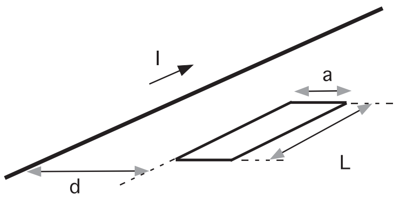

図 3: 電磁誘導

12. （運動起電力）一様な磁場の中に長方形の回路を磁場に垂直に置く（図 4）。この回路を磁場に垂直な中心軸の周りに等角速度 ω で回転させた時（a）、この回路に流れる電流 I を時間の関数として求めなさい。但し、回路の抵抗を R とする。また、回路を回すのに外力が単位時間あたりにする仕事 P を時間の関数として求めなさい。回転軸を長方形の一辺にとった場合（b）はどうなるか？

13. （自己インダクタンス）問題 10 の２つのシリンダーの両端を導線で繋いだ回路の自己インダクタンスを求めなさい。

14. （相互インダクタンスと相反定理）半径 R_1、長さ L の円筒形のコイル 1 の中に、半径 $R_2(< R_1)$ で同じ長さの小さい円筒形のコイル 2 を埋め込んだ複合回路を考える。それぞれのコイルの単位長さあたりの巻き数を n_1、n_2 とし、2 つのコイルは別々の閉じた回路に組み込まれているものとする。コイル 1 に電流 I_1 を流すと、コイル 2 に生じる誘導起電力は $\mathcal{E}_2 = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}$ で与えられる。逆に、コイル 2 に電流 I_2 を流すと、その変化に対しコイル 1 に生じる誘導起電力は $\mathcal{E}_1 = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}$ で与えられる。相互インダクタンス L_{21} と L_{12} を計算し、それが等しくなる事（相反定理）を示しなさい。

15. （変位電流とマクスウェルの方程式）マクスウェルの方程式を

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

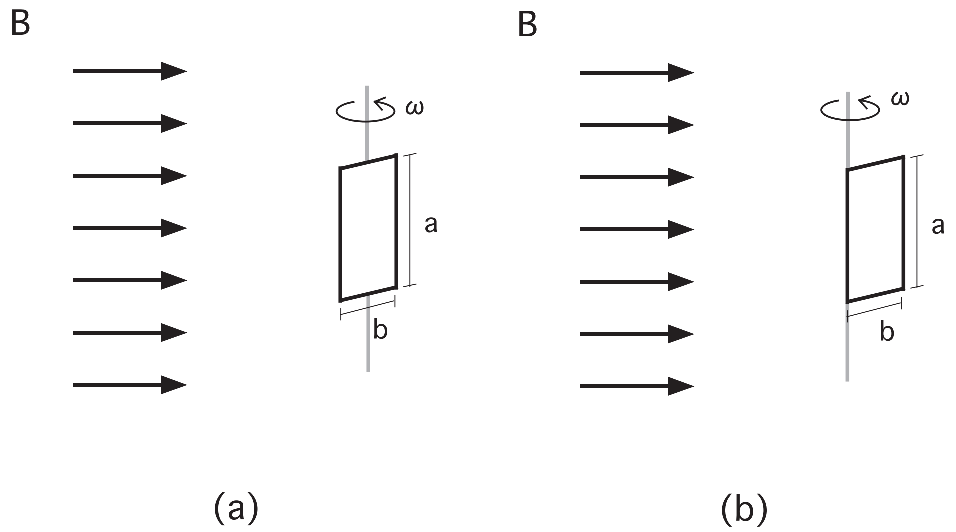

図 4: 一様磁場中を回転する長方形回路

と書き、電荷の保存則 (2) を満たすように定数 κ を求めなさい。

16. （波動方程式）真空中のマクスウェルの方程式から電磁波の波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0 \tag{10}$$

を導き、電磁波の伝わる早さ（光速）c を求めなさい。

17. （電磁波）波動方程式 (10) の解を

$$\mathbf{E} = (E_0 \cos(\omega t - kz), 0, 0) \tag{11}$$

とおいたとき、磁場 $\mathbf{B}$ はどうなるか？また、ω と k の関係を求めなさい。

18. （電磁波の運ぶエネルギー）電磁波にたいし

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2, \tag{12}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{13}$$

とおくと、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$$

がみたされることを示しなさい。これから $\mathbf{S}$（ポインティング・ベクトル）はエネルギーの流れの密度を与える量であることがわかる。