2015 年度 前期課程　　物理学・電磁気 A コース　例題 2　　10 月 30 日出題

担当教官: 松井哲男　　クラス：１年理 I （１９、２０）、理 II, III （１－４）

---

1. （静電エネルギーと核分裂）半径 R の球に一様に帯電した電荷の静電エネルギーは、

$$U = \frac{3}{5} \times \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \tag{1}$$

で与えられる。この結果を使って、半径 $R = 7 \times 10^{-15}$m のウラン原子核が二つの同じサイズの原子核に分裂したとき放出される静電エネルギーを計算しなさい。但し、原子核の電荷密度は一定とし、表面張力の効果は無視しなさい。ウラン核は 92 個の陽子からなり、陽子の電荷は電荷素量 $e = 1.6 \times 10^{-19}$C で与えられる。エネルギーの単位は eV （エレクトロンボルト）で計算しなさい。1 モルのウラン（約２４０ g）に含まれるウラン原子核がすべて核分裂したとき得られるエネルギーを J（ジュール）で求めなさい。表面張力（核力の効果）を考慮するとどうなるか？表面張力があると表面積に比例した正のエネルギーが生じることを使って、答えがどう変わるか定性的に述べなさい。

2. （ベクトル場の発散と回転）以下の式で与えられる２つのベクトル場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の発散、$\nabla \cdot \mathbf{F}$、と回転、$\nabla \times \mathbf{F}$、を計算しなさい。但し、係数 c は定数である。また、静電場の条件（$\nabla \times \mathbf{F} = 0$）をみたすベクトル場の場合、それに対応する静電ポテンシャルを求めなさい。

$$(F_x, F_y.F_z) = c(2xz, 2yz, x^2 + y^2) \tag{2}$$
$$(F_x, F_y.F_z) = c(yz, xz, z^2) \tag{3}$$

3. （微分形の静電場の法則）座標軸の原点に置かれた点電荷の作る電場、原点以外で微分形のガウスの法則、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4}$$

と、渦無し条件、

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{5}$$

をみたすことを示しなさい。また、電場を静電ポテンシャル ϕ をつかって $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ と書くと、渦無し条件（5）が自動的にみたされ、微分形のガウスの法則 (4) からポアッソンの方程式

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{6}$$

が導かれることを示せ。

4. （ポアッソンの方程式の解）電荷密度 ρ で一様に帯電した半径 R の球のつくる静電ポテンシャルをポアッソンの方程式（8）をつかって計算しなさい。

5. （ラプラスの方程式）z 軸上に線電荷密度 λ で一様に分布した電荷の作る静電ポテンシャルは、

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \tag{7}$$

で与えられる。これが、z 軸を除く全ての場所でラプラスの方程式 (真空中のポアッソンの方程式)、

$$\Delta\phi = 0 \tag{8}$$

をみたすことを示しなさい。

6. （静電ポテンシャルと電荷分布）ポアッソンの方程式 (8) を用いて静電ポテンシャル、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{ce^{-ar}}{r} \tag{9}$$

を作る電荷分布 $\rho(r)$ を求めなさい。ここで、a、c は定数である。

7. （導体球の周りの静電場）２つの半径 R_1 と R_2 の導体球を十分離して導線で結ぶ。この上に電荷 Q を与えたとき、それぞれの導体球上の電荷 Q_1、Q_2 と、その表面での電場の強さ E_1、E_2 を求めなさい。

8. （誘起電荷と鏡像法）無限に広がった導体平面から距離 d はなして点電荷 q を置いたときできる電場は、導体面の反対側に仮想電荷 $-q$ を置いたときに電荷 q と電荷 $-q$ が作る電場と導体板の反面で一致することを示しなさい。この結果を使って導体表面に誘起される電荷分布を求めなさい。

9. （アポロニウスの円と鏡像法）平面上で２つの固定点からの距離の比が一定の点の集合は円を描く（アポロニウスの円)。このことをつかって、半径 R の導体球の中心から距離 $d(> R)$ 離して点電荷 q を置いた時に導体球上に誘起される電荷分布を求めなさい。但し、導体球はアースされているものとする。

10. （一様電場中の導体球）座標軸の原点に置かれた電気双極子の作る静電ポテンシャルは

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} \tag{10}$$

であたえられる。ここで $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ は双極モーメントを表す。一方、一様電場 $\mathbf{E}$ の静電ポテンシャルは

$$\phi_2(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{r} \tag{11}$$

と書け、両方を重ね合わせて

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_1(\mathbf{r}) + \phi_2(\mathbf{r}) \tag{12}$$

とすると、$\mathbf{E} = \mathbf{p}/(4\pi\epsilon_0 R^3)$ をみたす半径 R の球面上でこのポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ は 0 となる。このことを使って、強さ E の一様電場中に半径 R の導体球を置いたとき、導体球の表面に誘起される電荷分布を求めなさい。

11. （コンデンサーと電気容量）半径 R_1 と R_2, 長さ L の２つの円筒型の導体を使った同軸円筒型コンデンサーの電気容量を求めなさい。但し、$L \gg R$ で、端の効果は無視できるとする。

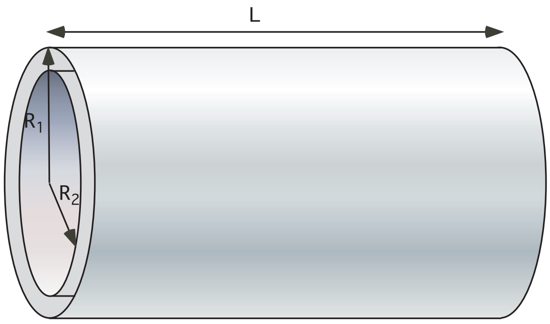

図 1: 円筒形コンデンサー

12. （電場のエネルギー密度）電場 $\mathbf{E}$ のエネルギー密度は

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2 \tag{13}$$

で与えられる。これを使って、上問のコンデンサーの中に蓄えられたエネルギーを計算し、それが $U = Q^2/2C$ と一致することを示しなさい。また、問題１でもとめた一様に帯電した球のつくる電場のエネルギーをこの公式を使って計算し、それが (1) に一致することを示しなさい。